

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008



Problema de transportes

- Caso particular de programação linear
- Permite uma solução particular mais simples que o caso geral de PL
- Embora se chame “problema de transportes”, aplica-se em muitos outros casos

Problemas de Transportes

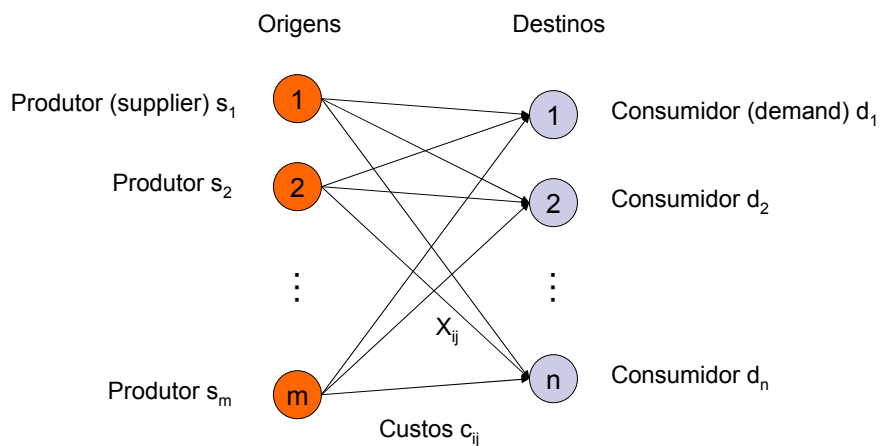
V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Aplicações de problemas de transporte

- Fornecimento de água
- Distribuição de energia eléctrica
- Dimensionamento de redes de telecomunicações
- Aconselhar/prever escoamento de tráfego

Formulação geral (em rede)

- Min custo



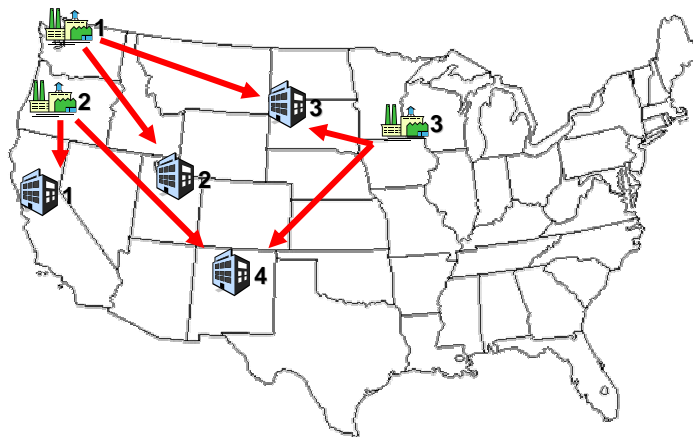
Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Exemplo: P&T – Ervilhas enlatadas

- Produz ervilhas enlatadas em três fábricas
Bellingham, WA, Eugene, OR, and Albert Lea, MN
- Envia em camiões a produção para quatro armazéns
Sacramento, CA, Salt Lake City, UT, Rapid City, SD, and
Albuquerque, NM
- Pode-se estimar as capacidades de produção, as
necessidades para os armazéns, e os custos dos
transportes
- Quere-se minimizar os custos em transportar as
latas !

P&T – Ervilhas enlatadas



Problemas de Transportes

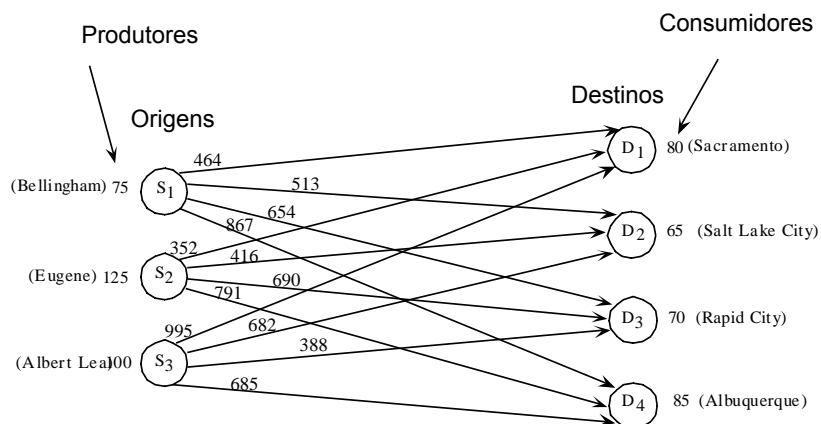
V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Dados do problema

- Quantidades produzidas nas fábricas
- Quantidades necessárias nos armazéns
- Matriz de custo dos transportes

fabrica	Armazem				oferta (camiões)
	1	2	3	4	
1	\$ 464	\$ 513	\$ 654	\$ 867	75
2	\$ 352	\$ 216	\$ 690	\$ 791	125
3	\$ 995	\$ 682	\$ 388	\$ 685	100
Procura (camiões)	80	65	70	85	300

Formulação como rede



Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Formulação como PL

- Variáveis de controlo: quantidade x_{ij} transportada entre a fábrica i e o armazém j
- Em cada fábrica i :
 - $x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + \dots = s_i$ capacidade de i
- Em cada armazém j :
 - $x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} + \dots = d_j$ procura de j
- Custo a minimizar
 - $Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{21}x_{21} + \dots + c_{ij}x_{ij}$

Formulação como PL

$$\text{Minimizar} = \$464x_{11} + \$513x_{12} + \$654x_{13} + \$867x_{14} + \\ \$352x_{21} + \$416x_{22} + \$690x_{23} + \$791x_{24} + \$995x_{31} + \\ \$682x_{32} + \$388x_{33} + \$685x_{34}$$

Sujeito a

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14}$	= 75
$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24}$	= 125
$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34}$	= 100
x_{11}	= 80
x_{12}	= 65
x_{13}	= 70
x_{14}	= 85
$+ x_{21}$	
$+ x_{22}$	
$+ x_{23}$	
$+ x_{24}$	
$+ x_{31}$	
$+ x_{32}$	
$+ x_{33}$	
$+ x_{34}$	

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Características do PT

- Forma da matriz simplex
 - Temos muitos 0, e alguns 1 (matriz binária)
 - C_{ij} só aparecem na função a minimizar
 - Todas as restrições são IGUALDADES
 - Muitas variáveis de decisão ($n \times m$)
 - “forma característica”
 - Forma balanceada:
$$\sum_{i=1}^m s_i = \sum_{j=1}^n d_j$$

Ideia geral do método dos transportes

- Não vamos ter necessidade de usar “M” e variáveis artificiais
 - Vamos usar outras variáveis auxiliares, mas que são em menor número que as tradicionais
- Vamos construir um novo tipo de tabela
 - Tabela do Problema de transportes
- 2 passos:
 - Obter solução inicial
 - Iterar o passo de optimização até ter a solução óptima

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Ideia geral do método dos transportes

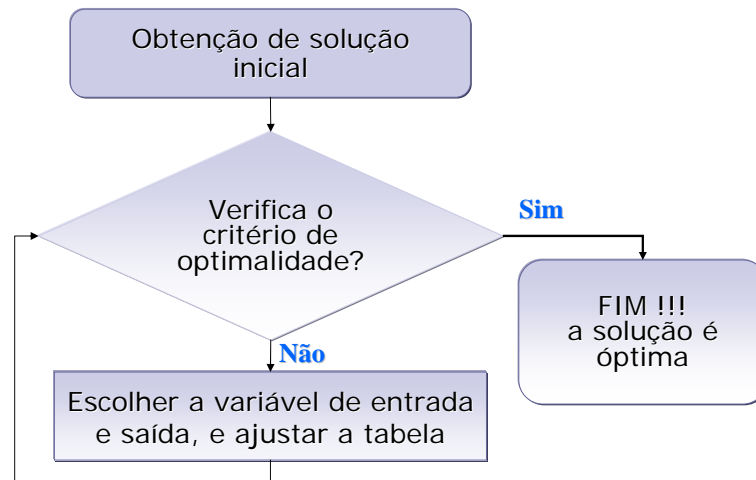


Tabela do método dos transportes

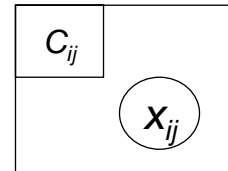
Origens	Destinos				Oferta	u_i
	1	2	...	n		
1	c_{11}	c_{12}	...	c_{1n}	s_1	
2	c_{21}	c_{22}	...	c_{2n}	s_2	
...	
m	c_{m1}	c_{m2}	...	c_{mn}	s_m	
Procura	d_1	d_2	...	d_n		$Z =$
v_j						

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Cada quadrícula da tabela

- Se x_{ij} for variável básica ($\neq 0$)



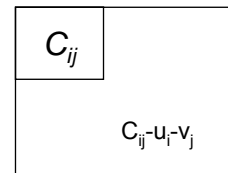
- Se x_{ij} for não-básica ($=0$)

- Variáveis auxiliares U_i e V_j

- Correspondem às variáveis duais
- Calculadas a partir dos coeficientes das variáveis básicas:

- $C_{ij} - u_i - v_j = 0$ $u_i + v_j = C_{ij}$

- Arbitra-se que $u_1 = 0$, ou $v_1 = 0$ na linha onde houver mais variáveis básicas



Determinação de uma solução inicial

- Método do “canto noroeste”

- Mais simples e fácil de entender
- A solução inicial pode ser longe de ótima

- Método dos “mínimos custos”

- Mais complexo, mas melhor solução inicial

- Método de Vogel

- Geralmente consegue uma solução inicial melhor

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Método no “canto noroeste”

- No canto “noroeste”, escolher o maior valor possível:
 - $\min(s_1, d_1)$
- Se se escolheu s_1 , então escolher a linha seguinte para anular d_1 (senão escolher a coluna seguinte para anular s_1)
- Repetir até todos os s e d serem cumpridos
- Exemplo:

Método de menor custo

- Escolher para primeira variável a maximizar, aquela que tiver menor C_{ij}
- Proceder como para o “canto noroeste”, mas escolher sempre como variável seguinte a que tiver menor C_{ij}
- É uma aproximação gulosa

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Método de Vogel

- Ideia base
 - Não interessa o que tem custo menor, mas sim aquele que fôr mais penalizado se não escolher o custo menor
- Calcular para cada linha e coluna a diferença entre os dois menores C , ou “penalização”
 - Na linha ou coluna onde ocorrer a maior o penalização escolher a célula que tiver o menor valor

Entrada e saída de variáveis

- Variável que entra
 - Seleccionar a variável com menor (negativo com maior valor absoluto) c_{ij} (ou c'_{ij})
- Variável que sai
 - Determinar a reacção cadeia que resulta da entrada da variável
 - A variável que sai será a primeira a chegar a 0 por causa dessa reacção
 - O valor da nova variável base será igual a esse valor

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Reacção em cadeia

- Para uma variável aumentar, outra vai ter que diminuir
 - Como os coeficientes são todos 1 (ou 0), os aumentos são directamente proporcionais às descidas
 - Um aumento de uma variável leva a um decréscimo na mesma coluna... que leva a um aumento nessa linha... que leva a um decréscimo.....
 - É necessário recalcular os x_{ij} , os u_i , e os v_j
 - Exemplo:

Exemplo simples

		<i>Custo por carga de camião</i>				
		Armazéns				
Fábricas		1	2	3	4	Oferta
1		1	2	3	4	6
2		4	3	2	4	8
3		0	2	2	1	10
Procura		4	7	6	7	

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Reduzir à forma balanceada

- O que fazer se a procura não for igual à oferta ?
 - Introduzir consumidor “fantasma”
 - Consome o excesso de produção
 - Corresponde a produtos que não saem da fábrica
 - Custo do transporte = 0
 - Introduzir produtor “fantasma”
 - Produz o que falta
 - Corresponde a produtos que não chegam ao armazém
 - Custo do transporte = 0

Outros problemas

- Percursos impossíveis
 - Atribuir custos arbitrariamente grandes (M)
- Empates
 - Podem ser resolvidos de forma arbitrária, pois não afectam a qualidade da solução final

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Exemplo mais complexo

- Distribuição de iPods para a época natalícia
- Produção em três fábricas
 - A: 200k unidades
 - B: 350k unidades
 - C: 150k unidades
- Procura em 4 centros mundiais de distribuição:
 - N: 100k unidades
 - S: 140k unidades
 - E: 300k unidades
 - W: 250k unidades
- Total de oferta vs. procura
 - Produzem-se 700 mil unidades, são necessárias 790 mil
 - Solução
 - Consideramos uma fábrica “fantasma” que produz 90 mil. Quem recebe os “fantasmas” não recebe nada !

Custos e tabela de transporte

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	
B	14	13	19	15		
C	9	20	23	10		
fantasma	0	0	0	0		
Procura	100	140	300	250	Z =	
v_j						

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Escolha pelo “noroeste”

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16 100	13 100	22	17	200	
B	14	13 40	19 300	15 10	350	
C	9	20	23	10 150	150	
fantasma	0	0	0	0 90	90	
Procura	100	140	300	250		$Z =$
v_j						

Solução inicial (pelo “noroeste”)

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16 100	13 100	22	17	200	
B	14	13 40	19 300	15 10	350	
C	9	20	23	10 150	150	
fantasma	0	0	0	0 90	90	
Procura	100	140	300	250		$Z =$

$$Z=100 \times 16 + 100 \times 13 + 40 \times 13 + 300 \times 19 + 10 \times 15 + 150 \times 10 + 90 \times 0$$

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Método de Vogel (1)

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	
B	14	13	19	15		
C	9	20	23	10	150	
fantasma	0	0	0	0		
Procura	100	140	300	250	Z =	
v_j						

Método de Vogel (2)

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	
B	14	13	19	15		
C	9	20	23	10	150	
fantasma	0	0	0	0		
Procura	100	140	300	250	Z =	
v_j						

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Método de Vogel (3)

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	
	60	140				
B	14	13	19	15	350	
C	9	20	23	10	150	
fantasma	0	0	0	0	90	90
Procura	100	140	300	250		Z =
	v_j					

Método de Vogel (4)

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16	13	22	17	200	
	60	140				
B	14	13	19	15	350	
	40					
C	9	20	23	10	150	
fantasma	0	0	0	0	90	90
Procura	100	140	300	250		Z =
	v_j					

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Método de Vogel (5)

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16 (60)	13 (140)	22	17	200	
B	14 (40)	13	19	15 (160)	350	
C	9	20	23	10	150	
fantasma	0	0	0	0 (90)	90	
Procura	100	140	300	250		Z =
v_j						

Método de Vogel (6)

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16 (60)	13 (140)	22	17	200	
B	14 (40)	13	19 (150)	15 (160)	350	
C	9	20	23 (150)	10	150	
fantasma	0	0	0	0 (90)	90	
Procura	100	140	300	250		Z =
v_j						

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Teste de optimalidade

- Temos que calcular os u_i e v_j
- Temos que calcular os c' para as variáveis não-básicas

Teste de optimalidade (1)

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16 60	13 140	22	17	200	
B	14 40	13	19 150	15 160	350	
C	9	20	23 150	10	150	
fantasma	0	0	0	0 90	90	
Procura	100	140	300	250		
	v_j					

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Teste de optimalidade (2)

Origem	destino				Oferta	u_i			
	N	S	E	W					
A	16	60	13	140	22	17	200	0	
B	14	40	13	19	150	15	160	350	-2
C	9	20	23	150	10		150	2	
fantasma	0	0	0	0	90		90	-17	
Procura	100	140	300	250					
v_j	16	13	21	17					

Teste de optimalidade (3)

Origem	destino				Oferta	u_i			
	N	S	E	W					
A	16	60	13	140	22	17	200	0	
B	14	40	13	19	150	15	160	350	-2
C	9	-9	20	3	23	150	10	150	2
fantasma	0	1	0	2	0	0	90	90	-17
Procura	100	140	300	250					
v_j	16	13	21	17					

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Vamos iterar !

- Escolher variável que entra
- Encontrar o ciclo crítico
- Alterar a tabela
- Testar optimalidade

Iteração 1

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16 60	13 140	22	17	200	0
B	14 40	13	19 150	15 160	350	-2
C	9 ?	20	23 150	10	150	2
fantasma	0	0	0	0 90	90	-17
Procura	100	140	300	250		
v_j	16	13	21	17		

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Fim da iteração 1

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16 60	13 140	22	17	200	
B	14	13	19 190	15 160	350	
C	9 40	20	23 110	10	150	
fantasma	0	0	0	0 90	90	
Procura	100	140	300	250		Z=11680
v_j						

Teste de optimalidade

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16 60	13 140	22 -8	17 -9	200	0
B	14 9	13 11	19 190	15 160	350	-11
C	9 40	20 14	23 110	10 -9	150	-7
fantasma	0 10	0 13	0 -4	0 90	90	-26
Procura	100	140	300	250		
v_j	16	13	30	26		

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Iteração 2

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16 60	13 140	22	17	200	0
B	14	13	19 190 ⁺	15 160 ⁻	350	-11
C	9 40	20	23 110 ⁻	10 ? ⁺	150	-7
fantasma	0	0	0	0 90	90	-26
Procura	100	140	300	250		
v_j	16	13	30	26		

Fim da iteração 2

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16 60	13 140	22	17	200	
B	14	13	19 300	15 50	350	
C	9 40	20	23	10 110	150	
fantasma	0	0	0	0 90	90	
Procura	100	140	300	250		Z=10690
v_j						

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Teste de optimalidade

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16 60	13 140	22 1	17 0	200	0
B	14 0	13 2	19 300	15 50	350	-2
C	9 40	20 14	23 9	10 110	150	-7
fantasma	0 1	0 4	0 -4	0 90	90	-17
Procura	100	140	300	250		
v_j	16	13	21	17		

Iteração 3

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16 60	13 140	22	17	200	0
B	14	13	19 300 ⁻	15 50 ⁺	350	-2
C	9 40	20	23	10 110	150	-7
fantasma	0	0	0 ? ⁺	0 90 ⁻	90	-17
Procura	100	140	300	250		
v_j	16	13	21	17		

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Fim da iteração 3

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16 60	13 140	22	17	200	
B	14	13	19 210	15 140	350	
C	9 40	20	23	10 110	150	
fantasma	0	0	0 90	0	90	
Procura	100	140	300	250		Z=10690
	v_j					

Teste de optimalidade

Origem	destino				Oferta	u_i
	N	S	E	W		
A	16 60	13 140	22 1	17 0	200	0
B	14 0	13 2	19 210	15 140	350	-2
C	9 40	20 14	23 9	10 110	150	-7
fantasma	0 5	0 8	0 90	0 4	90	-21
Procura	100	140	300	250		Z=10690
	v_j					

Problemas de Transportes

V 1.2, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Solução óptima

