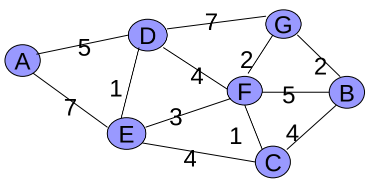
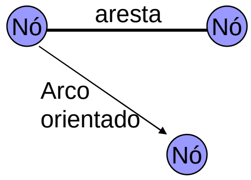
Problemas de Optimização em redes

Problemas de optimização em redes

- Conceito de grafo
  - Muitos problemas
  - Muitas aplicações
- Caminho mais curto
  - Qual o caminho mais curo de “A” para “B”
- Máximo fluxo
  - De que modo posso fazer passar o máximo de pessoas (ou água, ou contentores…)
- Minimum spanning tree (árvore de cobertura mínima)
  - Qual é o conjunto mínimo de arcos que liga todos os nós (ou quais os trajectos a alcatroar para se poder ir a qualquer lugar).
- (outros…TSP, PERT/CPM, Min Cost flow, etc,etc,,,)



Nomenclatura de grafos (1)



- Nós
  - Ou nodos, ou vértices
- Arestas
  - Ou linhas não direccionadas
- Arcos
  - Ou arcos orientados, ou linhas orientadas
- Lacetes
  - Arcos que começam e acabam no mesmo nó

Nomenclatura de grafos (2)

- Cadeia
  - Sequência de arcos
- Caminho
  - Cadeia onde os arcos têm a mesma orientação
- Ciclo
  - Cadeia onde o nó inicial e final são o mesmo
- Circuito
  - Ciclo onde os arcos têm a mesma orientação

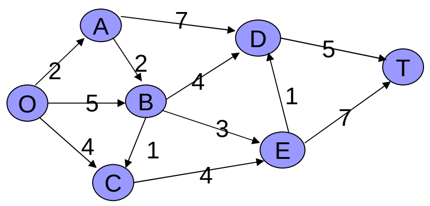
Nomenclatura de grafos (3)

- Circuito Hamiltoniano
  - Passa por todos os nós
- Circuito Euleriano
  - Atravessa todos os arcos
- Grafo conexo
  - Todos os nós estão ligados
- Matriz de adjacências
  - NxN, com uma linha/coluna para cada nó, e valores 0 ou 1 consoante haja ou não ligação

Exemplo: Parque natural "Seervada"

- Existem 7 "acampamentos"
  - Um é o de entrada para o parque: "O"
  - Um é o topo da montanha "T" onde muitos turistas querem ir
- Só os jipes do parque é que podem circular nas picadas. Cada picada:
  - Demora um determinado tempo a percorrer (custo)
  - Tem uma quantidade máxima de tráfego que pode acolher (senão afecta o equilíbrio ecológico).

Exemplo: Parque natural "Seervada"



- Modelo em rede
  - Custo dos arcos
- Problemas
  - Qual o caminho mais barato para chegar a "T" ?
    - Caminho mais curto
  - Quantas pessoas posso levar a "T" ? Como ?
    - Máximo fluxo
  - Para ligar todos os acampamentos à internet, por onde devem passar os cabos
    - Minimum Spanning Tree

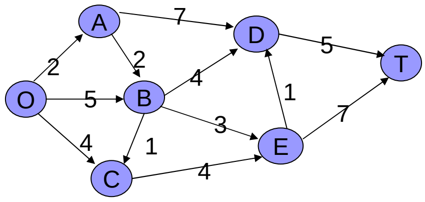
Minimum Spanning Tree

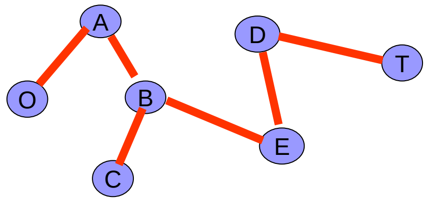
- Algoritmo "guloso"
  - Vamos ligando os mais próximos, até estarem todos ligados
  - Neste caso, é possível provar que a solução é óptima !
- Passos:
  - 1 - Escolher os dois nós mais próximos
  - 2- Escolher o nó que esteja mais próximo de algum dos nós escolhidos
  - 3 – Repetir 2 até não haver mais nós
- Exemplo

Exemplo de MST

- Forma matricial

	O	A	B	C	D	E	T
O	0	2	5	4	-	-	-
A		0	2	-	7	-	-
B			0	1	4	3	-
C				0	-	4	-
D					0	1	5
E						0	7
T							0

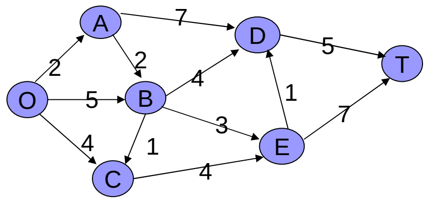




Caminho mais curto

- Algoritmo de Dijkstra
  - Ir “expandindo” os nós “conhecidos”
- Passos
  - Calcular os custos para os vizinhos imediatos
    - Calcular os custos para os vizinhos dos vizinhos
      - Ver se já estão na tabela
      - Se tivermos um custo menor, substituir a entrada na tabela.
  - Exemplo

Exemplo do algoritmo de Dijkstra



- 1ª iteração

	O	A	B	C	D	E	T
O	0	2	5	4	-	-	-

- 2ª iteração

	O	A	B	C	D	E	T
O	0	2	4	4	9	8	-
A		0	2	3	7	5	-
B			0	1	4	3	-
C				0	5	4	-

	O	A	B	C	D	E	T
O	0	2	5	4	-	-	-
A		0	2	-	7	-	-
B			0	1	4	3	-
C				0	-	4	.
D					0	1	5
E						0	7
T							0

- 3ª iteração
  - …

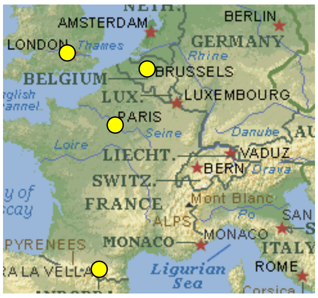
Problema do caixeiro viajante

- TSP – Travelling Salesman Problem
- Problema paradigmático para uma classe muito importe de problemas
  - “NP-completo”
- Problema “difícil”
  - Se o número de variáveis aumenta, o trabalho necessário para o resolver aumenta “mais que polinomialmente” (tanto quanto sabemos…)
  - Única maneira de garantir o óptimo é experimentar todas as soluções possíveis
  - Número de soluções possíveis: (n-1)!
    - 1! = 1 10! =3.628.800 100!=9,3e+157

Problema do caixeiro viajante

- Enumeração exaustiva
  - Leva demasiado tempo
- Branch-and-bound (ou A*)
  - Enumeração "implícita" das soluções
  - Pode reduzir muito drasticamente o tempo necessário
  - Ideia base
    - Obter uma solução "incremental" onde o custo é monotonamente crescente
    - Começar por uma solução (o melhor possível)
    - Ir construindo soluções até atingir o custo daquela que já temos
    - Exemplo

Exemplo do caixeiro viajante



	Paris	Londres	Bruxelas	Andorra
Paris	0,0	3,5	3,0	6,4
Londres	3,5	0,0	4,6	9,1
Bruxelas	3,0	4,6	0,0	8,8
Andorra	6,4	9,1	8,8	0,0

- Usando Bruxelas como base, qual o circuito mais curto ?
  - Nº de soluções possíveis
    - 3! = 6
  - Utilização de B&B