

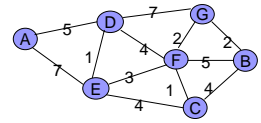
Problemas de Optimização em Redes

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Problemas de Optimização em redes

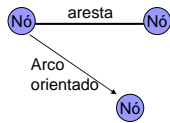
Problemas de optimização em redes

- Conceito de grafo
 - Muitos problemas
 - Muitas aplicações
- Caminho mais curto
 - Qual o caminho mais curto de "A" para "B"
- Máximo fluxo
 - De que modo posso fazer passar o máximo de pessoas (ou água, ou contentores...)
- Minimum spanning tree (árvore de cobertura mínima)
 - Qual é o conjunto mínimo de arcos que liga todos os nós (ou quais os trajectos a alcatroar para se poder ir a qualquer lugar).
- (outros...TSP, PERT/CPM, Min Cost flow, etc,etc,,)



Nomenclatura de grafos (1)

- Nós
 - Ou nodos, ou vértices
- Arestas
 - Ou linhas não direccionadas
- Arcos
 - Ou arcos orientados, ou linhas orientadas
- Lacetes
 - Arcos que começam e acabam no mesmo nó



Nomenclatura de grafos (2)

- Cadeia
 - Sequência de arcos
- Caminho
 - Cadeia onde os arcos têm a mesma orientação
- Ciclo
 - Cadeia onde o nó inicial e final são o mesmo
- Circuito
 - Ciclo onde os arcos têm a mesma orientação

Nomenclatura de grafos (3)

- Circuito Hamiltoniano
 - Passa por todos os nós
- Circuito Euleriano
 - Atravessa todos os arcos
- Grafo conexo
 - Todos os nós estão ligados
- Matriz de adjacências
 - $N \times N$, com uma linha/coluna para cada nó, e valores 0 ou 1 consoante haja ou não ligação

Exemplo: Parque natural "Seervada"

- Existem 7 "acampamentos"
 - Um é o de entrada para o parque: "O"
 - Um é o topo da montanha "T" onde muitos turistas querem ir
- Só os jipes do parque é que podem circular nas picadas. Cada picada:
 - Demora um determinado tempo a percorrer (custo)
 - Tem uma quantidade máxima de tráfego que pode acolher (senão afecta o equilíbrio ecológico).

Problemas de Optimização em Redes

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

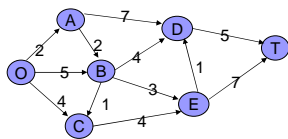
Exemplo: Parque natural "Seervada"

Modelo em rede

- Custo dos arcos

Problemas

- Qual o caminho mais barato para chegar a "T"?
 - Caminho mais curto
- Quantas pessoas posso levar a "T"? Como?
 - Máximo fluxo
- Para ligar todos os acampamentos à internet, por onde devem passar os cabos
 - Minimum Spanning Tree



Minimum Spanning Tree

Algoritmo "guloso"

- Vamos ligando os mais próximos, até estarem todos ligados
- Neste caso, é possível provar que a solução é ótima!

Passos:

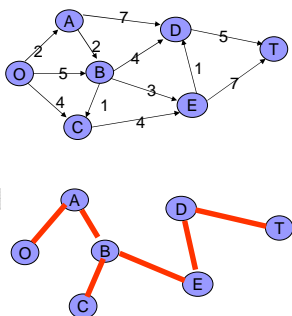
- Escolher os dois nós mais próximos
- Escolher o nó que esteja mais próximo de algum dos nós escolhidos
- Repetir 2 até não haver mais nós

Exemplo

Exemplo de MST

Forma matricial

	O	A	B	C	D	E	T
O	0	2	5	4	-	-	-
A		0	2	-	7	-	-
B			0	4	4	3	-
C				0	-	4	-
D					0	1	5
E						0	7
T							0



Caminho mais curto

Algoritmo de Dijkstra

- Ir "expandindo" os nós "conhecidos"

Passos

- Calcular os custos para os vizinhos imediatos
 - Calcular os custos para os vizinhos dos vizinhos
 - Ver se já estão na tabela
 - Se tivermos um custo menor, substituir a entrada na tabela.
- Exemplo

Exemplo do algoritmo de Dijkstra

1ª iteração

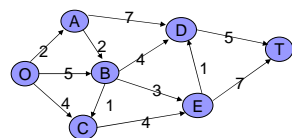
	O	A	B	C	D	E	T
O	0	2	5	4	-	-	-

2ª iteração

	O	A	B	C	D	E	T
O	0	2	4	4	9	8	-
A		0	2	3	7	5	-
B			0	1	4	3	-
C				0	5	4	-

3ª iteração

- ...



	O	A	B	C	D	E	T
O	0	2	5	4	-	-	-
A		0	2	-	7	-	-
B			0	1	4	3	-
C				0	-	4	-
D					0	1	5
E						0	7
T							0

Problema do caixeiro viajante

TSP – Travelling Salesman Problem

Problema paradigmático para uma classe muito importe de problemas

- "NP-completo"

Problema "difícil"

- Se o número de variáveis aumenta, o trabalho necessário para o resolver aumenta "mais que polinomialmente" (tanto quanto sabemos...)
- Única maneira de garantir o ótimo é experimentar todas as soluções possíveis
- Número de soluções possíveis: $(n-1)!$
 - $1! = 1$ $10! = 3.628.800$ $100! = 9,3e+157$

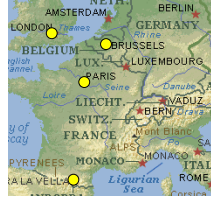
Problemas de Optimização em Redes

V 1.1, V.Lobo, EN / ISEGI, 2008

Problema do caixeiro viajante

- Enumeração exaustiva
 - Leva demasiado tempo
- Branch-and-bound (ou A*)
 - Enumeração "implícita" das soluções
 - Pode reduzir muito drasticamente o tempo necessário
- Ideia base
 - Obter uma solução "incremental" onde o custo é monotonamente crescente
 - Começar por uma solução (o melhor possível)
 - Ir construindo soluções até atingir o custo daquela que já temos
 - Exemplo

Exemplo do caixeiro viajante



- Usando Bruxelas como base, qual o circuito mais curto?
 - N° de soluções possíveis
 - $3! = 6$
 - Utilização de B&B

	Paris	Londres	Bruxelas	Andorra
Paris	0,0	3,5	3,0	6,4
Londres	3,5	0,0	4,6	9,1
Bruxelas	3,0	4,6	0,0	8,8
Andorra	6,4	9,1	8,8	0,0