Acústica – Processamento de Sinal

4ºAno EN-AEL, 3ºAno M

Processamento de Sinal para acústica

Victor Lobo

Mestrados Integrados de M (Acústica, Sonar e Armas Submarinas)
e EN-AEL (Sistemas de Detecção e Armamento Submarino

1

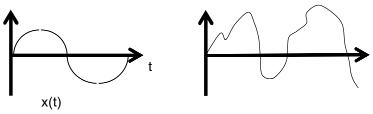
Porquê

- Porquê estudar processamento de sinal ?
  - Todos os **sons são sinais**, transformados por **sistemas**
  - Todo o **processamento** é actualmente feito sobre representações **digitais** dos sinais (ou seja sobre vectores numéricos), e não sinais contínuos (e muito menos sobre sobre funções analíticas)

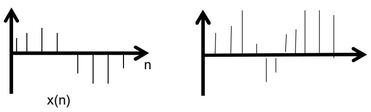
2

Análise de Sinais

- O que é um sinal ?
  - Uma sequência de valores
    - Sinal contínuo



    - Sinal discreto

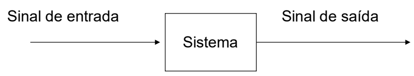


    - Exemplos
      - Sons, ecos de sonar, ecos de radar, sinais eléctricos, movimentos mecânicos, imagens,..

3

Sinais e sistemas

- Sistema
  - Recebe um sinal, processa-o, e produz outro sinal "à saída"



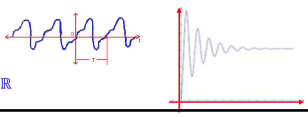
Sinal que sai do emissor → oceano → sinal que chega ao hidrofone
Sinal do hidrofone → equipamento sonar → sinal para o operador

Sinal de antena → rádio → sinal para altifalantes
Ondulação → navio → balanço de navio
Sinal de controlo eléctrico → motor → binário
Sinal para altifalantes → caixa "de psicadélicas" → lâmpadas

4

Sinais discretos *versus* contínuos

- Sinais contínuos
  - Ocorrem frequentemente "na natureza"
  - São representados por ***funções contínuas***
  - É difícil manipulá-las em computadores (têm que ser maipuladas analiticamente)
  - Para trabalhar com este tipo de tipo de sinais é mais fácil substituí-lo por **AMOSTRAS** digitais, feitas com uma **regularidade "suficientemente alta**"

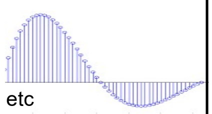


$y(t) = 4{,}3 \times \sin(0{,}25t) \;\; t \in \mathbb{R}$

5

Sinais discretos *versus* contínuos

- Sinais discretos
  - Sinais discretos "por natureza"
    - população, modelos económicos, etc
  - Sinais contínuos discretizados
    - Facilidade de manipulação
  - Podem ser representados por funções ou por ***vectores ou matrizes***
  - Processamento digital de sinais (DSP – Digital Signal Processing) é actualmente uma área importante de engenharia



$y(n) = 4{,}3 \times \sin(0{,}25n) \;\; n \in \mathbb{N}$

$y(n) = [0.00\ 1.06\ 2.06\ 2.93\ 3.62\ 4.08\ 4.29\ 4.23\ 3.91\ 3.35\ 2.57\ 1.64\ 0.61\ -0.47\ -1.5$

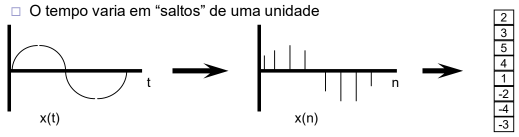
6

Acústica – Processamento de Sinal

4ºAno EN-AEL, 3ºAno M

Representação de sinais discretos

- Sinais **discretos no tempo**
  - O tempo varia em "saltos" de uma unidade



- Sinais **discretos em amplitude**
  - Os sinais digitais são não só discretos no tempo, como discretos nos valores que podem tomar (erro de quantização). Vamos por enquanto ignorar este efeito
- São séries de valores
  - Podemos guardar em MATRIZES e manipular no computador
  - x(0) = 0, x(1) = 10, x(2) = 18, x(3) = 23, 19, 11, 1, -9, -17, -22, ...

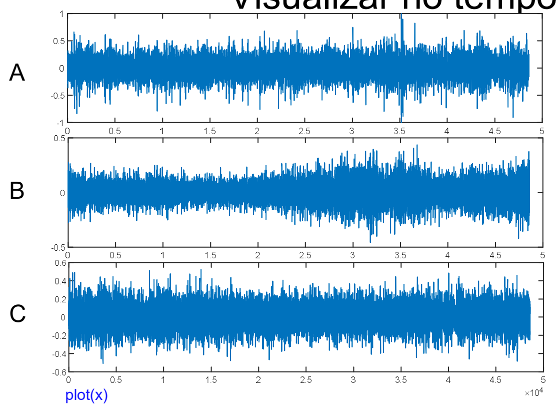
7

Vantagens em processar sons

- 3 gravações de sonar passivo (A,B,C)
  - Ouvir o som A, B, C
  - Ler em matlab:
    - [X, FS]=audioread('X.wav');
    - X = Amplitude de cada amostra
    - FS = Frequência de Amostragem

8

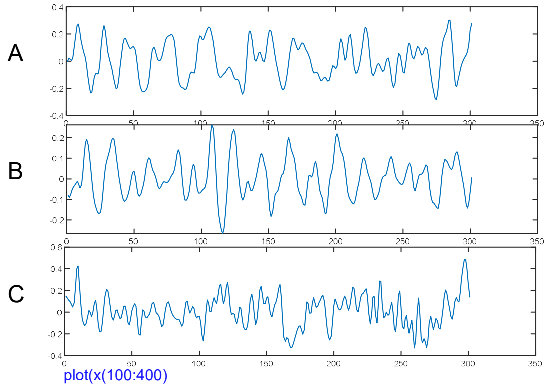
Visualizar no tempo



plot(x)

9

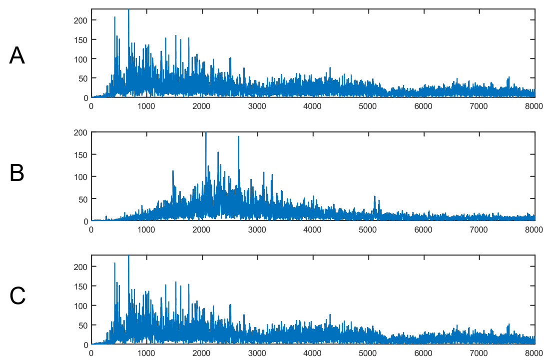
Visualizar no tempo (mais detalhe)



plot(x(100:400)

10

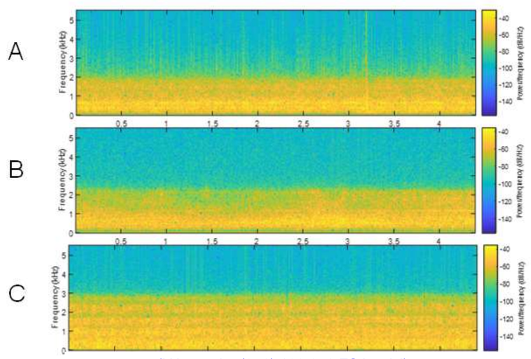
Visualizar na frequência



sp_X=abs(fft(hamming(48600).*(X-mean(X))));plot(sp_X(1:8000));

11

Visualizar em tempo-frequência



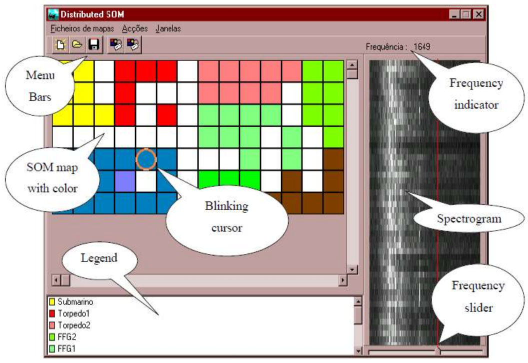
spectrogram(X,hamming(256),128,256,FS,'yaxis')

12

Acústica – Processamento de Sinal

4ºAno EN-AEL, 3ºAno M

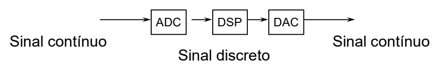
Visualizar num sistema de classificação



13

Implementação de sistemas discretos

- Facilidade de implementação
  - Sistemas dedicados simples com 1 µP, ROM, RAM, ADC, DAC
  - Computadores de uso geral
- Facilidade em mudar as características
  - Sistemas facilmente reprogramáveis
  - Filtros adaptativos
- Facilidade em simular/implementar no computador
  - Processamento resume-se a manipular matrizes, que pode ser feito até com folhas de cálculo
  - Programas dedicados: MatLab, Labview, Dadisp, etc.



14

Vantagens de DSP

- Robustez e fiabilidade
  - imunidade ao ruído
  - ausência de parâmetros aleatórios ou de difícil controlo
- Possibilidade de características impossíveis em contínuo
  - Filtros "ideais"
  - Sistemas que seguem exactamente a referência
- Facilidade em construir circuitos integrados dedicados
  - A partir de um "core" standard é fácil adicionar outros módulos
- Potência de cálculo computacional cada vez maior

15

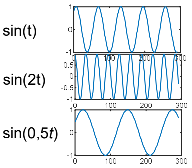
Sinais e transformações de variável

- Definição de sinais:
  - São funções de uma ou mais variáveis independentes que contêm informação sobre o comportamento e características de determinados fenómenos.
  - Essas funções têm:
    - Um domínio, ou variável independente (tempo,espaço,etc)
    - Um contradomínio, ou grandeza que está a ser observada
    - Exemplos
      - y=f(x), i=f(v), etc
- Transformações lineares da variável independente
  - y=f(x) para y=f(ax+b) a,b $\in \Re$

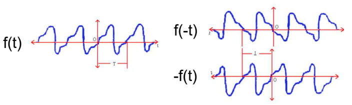
16

Sinais e transformações de variável

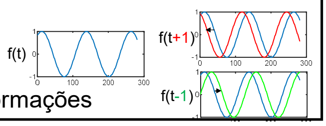
- Mudança de escala (b=0, a>0)
  - y=f(ax)
  - Gráfico de:
    - a>1 (contração do sinal)
    - a<1 (expansão do sinal)



- Reflexão em relação à origem
  - y=f(-x) (a=-1)
  - Gráfico:



- Translação
  - y=f(x+b)
  - Gráfico de:
    - b>0 (avanço no tempo)
    - b<0 (atraso no tempo)

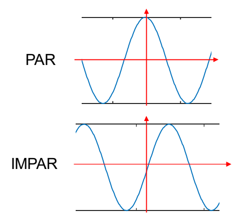


- Composição de transformações

17

Propriedades

- Paridade de um sinal
  - Sinal Par: f(x)=f(-x)
  - Sinal Ímpar: f(x)=-f(-x)
  - Gráficos:



  - Características interessantes:
    - QUALQUER sinal pode ser decomposto na soma de uma componente par e uma componente ímpar
    - $f(x)=f_P(x)+f_i(x)$ onde
      - $f_i(x) = ½*[f(x)-f(-x)]$ (parte ímpar)
      - $f_p(x) = ½*[f(x)+f(-x)]$ (parte par)
      - Prova:...

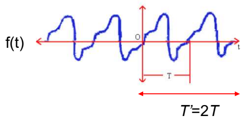
18

Acústica – Processamento de Sinal

4ºAno EN-AEL, 3ºAno M

Propriedades

- Periodicidade
  - Sinal periódico:
    - f(x)=f(x+T) $\forall x$
    - T (ou T_0) é o período



  - Características interessantes:
    - Um sinal periódico é necessariamente infinito
      - Sinal período durante um dado intervalo de tempo
    - Se tem período *T*, tem também período *nT*
      - T_0 é o período mínimo que satisfaz a condição, ou período fundamental
    - Um sinal constante tem período fundamental 0…

19

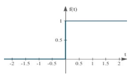
Exercícios

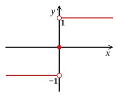
- Separar o sinal S1 nas suas componentes pares e ímpares (t=0 é o 21º ponto). Repetir para o sinal A.
- Verificar se o sinal S2 é periódico ao longo da sua duração
- Classificar quanto a paridade e periodicidade os seguintes sinais contínuos
  - y=sin(x)
  - y=cos(x)
  - y=exp(x
  - y=abs(x)
  - $y=x^2$
- Antes de continuar a ver propriedades vamos dar uma espeitadela nos sinais "base" mais importantes

20

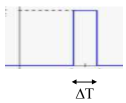
Sinais mais importantes

- Escalão unitário
  - Função de heaviside *u(t)*

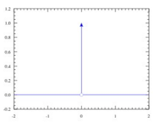




  - Função sinal
  - Inversão e deslocamento
  - Multiplicação por um escalão
- Função rectangulo ("função quadrada")
  - Casos discretos
  - Multiplicação por um rectângulo



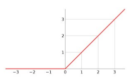
- Função impulso unitário (ou função delta)
  - Caso discreto
  - Caso contínuo
    - Derivada de *u(t)*, integral=1, $\forall t \neq 0$, f=0
    - Também chamado *delta de Dirac*
  - Multiplicação por um impulso

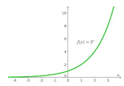


21

Sinais importantes

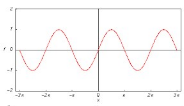
- Rampas
- Exponenciais

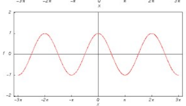

Rampa


Exponencial

- Senos
- Exponenciais complexas

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \times \sin(\omega t)$$





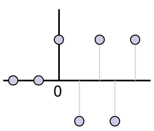
  - São funções próprias de *SLITS*
    - Sistemas Lineares Invariantes no tempo
    - Entra um Seno -> sai um Seno
      - Só muda a amplitude e a fase

22

Sinais mais importantes

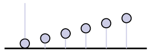
- **Escalão unitário alterno**
  - Só exite caso no caso discreto

$$x(n) = (-1)^n u(n) = \begin{cases} 0 \Leftarrow n < 0 \\ +1 \Leftarrow n \geq 0 \wedge n\ par \\ -1 \Leftarrow n \geq 0 \wedge n\ ímpar \end{cases}$$

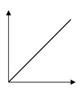


- **Rampa unitária**

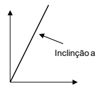
$$x(n) = \begin{cases} 0 \Leftarrow n \leq 0 \\ K \Leftarrow n > 0 \end{cases}$$



$$x(t) = \begin{cases} 0 \Leftarrow t < 0 \\ t \Leftarrow t > 0 \end{cases}$$



$$x(t) = \begin{cases} 0 \Leftarrow t < 0 \\ at \Leftarrow t > 0 \end{cases}$$

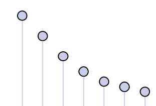


23

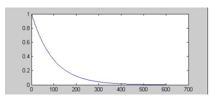
Sinais mais importantes

- **Exponencial decrescente**

x(n) = a^n u(n)



$$x(t) = \begin{cases} 0 \Leftarrow t < 0 \\ a^t \Leftarrow t > 0 \end{cases}$$



a > 1 diverge
a=1 constante
a<1 constante

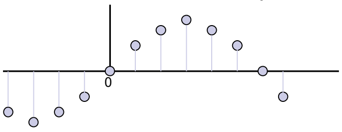
24

Acústica – Processamento de Sinal

4ºAno EN-AEL, 3ºAno M

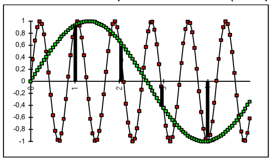
Sinais mais importantes

- **Sinusioides**
  - Caso contínuo
    - sin(ω t)
      - f=ω/2π
  - Caso discreto
    - sin(ω n)



MUITO IMPORTANTE ! IMPORTANTÍSSIMO !

sin(ω n) = sin(ω n + 2π) As sinusóides discretas só são diferentes para **0 < ω < 2π** (ou qq intervalo de largura 2π)



seja ω´= ω+2π

sin(ω´n) =sin((ω+2π)n)

=sin(ωn +2πn)

=sin(ωn)

Q.E.D

25

Sinais mais importantes

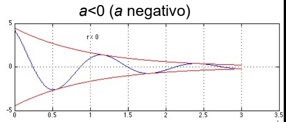
- **Exponencial complexa**
  - Junta o comportamento do seno com a exponencial:

$$x(t) = Ce^{at}$$

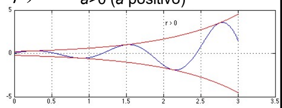
$$C = Ae^{j\phi} \quad a = r + j\omega$$

$$\mathrm{Re}(x(t)) = Ae^{at}\cos(\omega t + \phi)$$

a<0 (*a* negativo)



a>0 (*a* positivo)



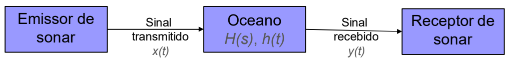
26

Sistemas

27

Sistemas

- Conceito
  - Diccionário: *Um sistema é uma combinação de elementos que actuam em conjunto a fim de atingir um dado objectivo*
  - Algo que transforma um sinal noutro sinal
    - é tido como um bloco ou "caixa preta"
  - Fronteiras de um sistema: depende que quem o vê e para quê
- Diagramas de blocos
  - Cada bloco é uma caixa negra, caracterizada por um "comportamento global"
    - Um sistema pode eventualmente ser "partido" em sub-sistemas
    - Um sistema pode ser agregado com outros para formar um sistema de "mais alto nível"
    - Blocos/ramos/pontos de derivação/pontos de soma
- Exemplos de sistemas descritos por diagramas de blocos



28

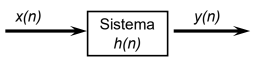
Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo- **SLIT**

- Definições
  - **Linear**
    - Se o sistema tem a resposta Y_1 para uma entrada X_1, e a resposta Y_2 para uma entrada X_2 então, se tiver uma entrada $X_3=X_1+X_2$ terá uma resposta $Y_3=Y_1+Y_2$
    - $f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$
  - **Invariante no tempo**
    - "Reage sempre da mesma maneira"
    - A reacção não depende da altura no tempo em que a excitação ocorre
    - $\forall t_0$

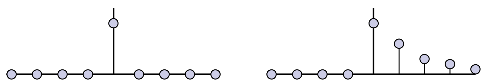
29

SLIT - Sist.Linear e Invariante no Tempo

- SLIT - Sistema linear invariante ao tempo



- **RESPOSTA IMPULSIVA**
  - Resposta ao impulso unitário
  - Designa-se por h(n)



E quando a entrada não é um impulso ? h(n) servirá para alguma coisa ?

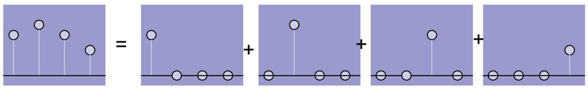
30

Acústica – Processamento de Sinal

4ºAno EN-AEL, 3ºAno M

SLIT - Sist.Linear e Invariante no Tempo

- Qualquer sinal pode ser considerado como a sobreposição de vários *delta de Dirac*, com amplitudes tempos diferentes:



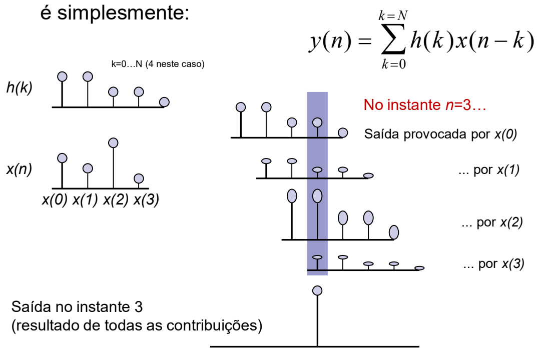
- Se o sistema é linear e invariante no tempo, a saída pode ser calculada somando as respostas impulsivas a cada um desses sinais
  - Obtemos assim a ***CONVOLUÇÃO*** dos dois sinais

31

INTERPRETAÇÃO DO SIGNIFICADO DA CONVOLUÇÃO

- Para um sistema causal e limitado no tempo, a resposta é simplesmente:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{k=N} h(k)x(n-k)$$



32

Resposta de um SLIT

- A resposta de um slit é a convolução da entrada com a resposta impulsiva:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k)h(n-k)$$

  - Nota: Por vezes chama-se h(n,k) em vez de h(n-k), para realçar que se trata da resposta no instante *n* provocada pela entrada do momento *k*
- Expandindo para um caso concreto (por ex. n=1)
  - y(1)= …+ x(-2)h(3) + x(-1)h(2) + x(0) h(1) + x(1)h(0) + x(2) h(-1) +….
- Notação para CONVOLUÇÃO: *
  - X(n)*Y(n)

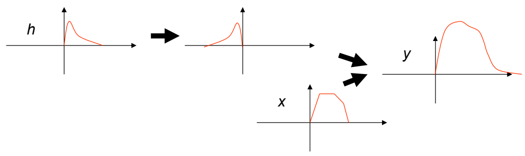
33

INTERPRETAÇÃO DO SIGNIFICADO DA CONVOLUÇÃO

- Reordenação dos termos da soma

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k)h(n-k)$$

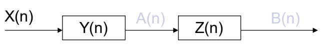
- Outra interpretação gráfica
  - Inverter a resposta impulsiva
  - "Passá-lo" pelo sinal de entrada



34

Propriedades da convolução

- Associatividade
  - X(n)*Y(n)*Z(n) = (X(n)*Y(n)) *Z(n) = X(n)* (Y(n)*Z(n))



- Comutatividade
  - X(n)*Y(n) = Y(n)*X(n)
- Distributividade
  - X(n)*(Y(n)+Z(n)) = X(n)*Y(n) + X(n)*Z(n)

35

PROPRIEDADES DE SISTEMAS

- MEMÓRIA
  - Diz-se que um sistema tem memória se a saída depende de entradas anteriores (ou posteriores)
  - Para que um sistema não tenha memória a resposta tem que ser da forma ?
    - Uma mera multiplicação por uma constante

- CAUSALIDADE
  - Diz-se que um sistema é causal quando a sua saída não depende da entrada em instantes futuros
  - Há muitos sistemas não causais
    - Exemplos em processamento de imagem
  - A resposta impulsiva de um sistema causal é 0 para n<0

36

Acústica – Processamento de Sinal

4ºAno EN-AEL, 3ºAno M

PROPRIEDADES DE SISTEMAS

- **INVERTIBILIDADE**
  - Diz-se que um sistema é invertível quando há um sistema (dito inverso) que o anula, de modo que o sinal não é alterado quando passa por esses dois sinais

$$x(n) \longrightarrow \boxed{h(n)} \xrightarrow{y(n)} \boxed{h'(n)} \longrightarrow z(n)=x(n)$$

$y(n)=x(n)*h(n)$

$z(n)=y(n)*h'(n) = x(n)*h(n)*h'(n) \Rightarrow h(n)*h'(n)= d(n)$

Exemplo de um sistema invertível: um integrador

Integrador $\rightarrow h(n)=u(n)$

Diferenciador $\rightarrow h'(n)=d(n)-d(n-1)$

$$\begin{aligned} h(n)*h'(n) &= u(n)*(d(n)-d(n-1)) \\ &= u(n)*d(n)-u(n)*d(n-1) \\ &= u(n)-u(n-1) \\ &= d(n) \end{aligned}$$

37

PROPRIEDADES DE SISTEMAS

- **ESTABILIDADE**
  - Há vários critérios de estabilidade diferentes.
  - Vamos considerar um sistema estável se só se e apresentar uma *SAÍDA LIMITADA PARA UMA ENTRADA LIMITADA*
    - Uma sequência diz-se limitada se $|x(k)|<M \ \forall_k$
    - Exemplo:
      - u(n) é limitada (nunca é maior que 1)
      - x (n) = n não é limitada (tende para infinito)
  - Para que um sistema seja estável é necessário que a sua resposta impulsiva seja absolutamente somável

$$\begin{aligned} |y(n)| = |x(n)*h(n)| &= \left| \Sigma\, x(k)h(n-k) \right| \\ &\le \Sigma |x(k)|\,|h(n-k)| \quad \text{mas } |x(k)|<M \\ &\le \Sigma\, M\, |h(n-k)| \\ &= M\, \Sigma |h(n-k)| \quad \text{se } \Sigma|h(n-k)|\text{, e fôr N...} \\ &\le M\text{x}N \end{aligned}$$

Um integrador é um sistema estável ? E o integrador com perdas apresentado no acetato 6 ? E o diferenciador do acetato anterior ?

38

PROPRIEDADES DE SINAIS

- **ENERGIA e POTÊNCIA**
  - Define-se energia de um sinal como sendo:

$$Energia = W = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |x(k)|^2$$

  - Para sinais periódicos, é mais conviniente usar a energia média, ou potência(dado que a energia total é infinita):

$$Energia\ media = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{k=N-1} |x(k)|^2 \qquad \text{onde N=periodo}$$

  - Ou generalizando para qualquer sinal:

$$Potencia = P = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{t=-k/2}^{t=+k/2} |x(t)|^2$$

39

Convolução em sistemas contínuos

- Em sistemas contínuos, basta substituir impulsos por deltas de Dirac, e somatórios por integrais…

40

Descrição de sistemas através de **EQUAÇÕES ÀS DIFERENÇAS**

- Muitos sistemas são descritos através de equações diferenciais (caso contínuo) ou equações às direrenças
  - Forma geral: $x \longrightarrow \boxed{\text{sistema}} \longrightarrow y$

$$a_n\frac{d^n y}{dt^n}+a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\ldots+a_2\frac{d^2y}{dt^2}+a_1\frac{d\ y}{dt}+y=b_0x+b_1\frac{d\ x}{dt}+\ldots+b_m\frac{d^m x}{dt^m}$$

O que é uma derivada de um sinal discreto ?

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{N}a_i\frac{d^i y}{dt^i}}_{\text{Equação homogénea}}=\underbrace{\sum_{i=0}^{M}b_i\frac{d^i x}{dt^i}}_{\text{Termo forçado}}$$

  - Caso discreto

N = Ordem do sistema

$$\sum_{i=0}^{N}a_i y(n-i)=\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-k)$$

41

Equações às diferenças

- Por uma questão de normalização, considere-se a_0=0, e re-escreve-se a equação como:

$$y(n)=\underbrace{-\sum_{i=1}^{N}a_i y(n-i)}_{\text{Derivadas da saída}}+\underbrace{\sum_{i=0}^{M}b_i x(n-k)}_{\text{Derivadas da entrada}}$$

- Termos derivados da saída
  - Forma uma equação RECURSIVA
  - Dão origem a uma resposta impulsiva INFINITA
  - Dão origem aos filtros IIR (Infinite Impulse Response)
- Termos derivados das entradas
  - Formam uma equação NÃO RECURSIVA
  - Dão origem a uma resposta impulsiva FINITA
  - Dão origem aos filtros FIR (Finite Impulse Response)

42

Acústica – Processamento de Sinal

4ºAno EN-AEL, 3ºAno M

Equações às diferenças - Parte homogénea

Resposta impulsiva infinita - IIR

- A dinâmica de muitos sistemas contínuos pode ser descrita através de equações diferenciais homogéneas

  ay''+by'+cy=0

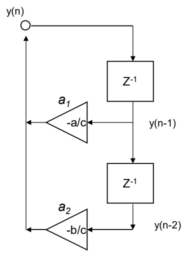
- De modo análogo, a correspondente representação por equações às difrenças será

  ay(n-2)+by(n-1)+cy(n)=0

- A implementação a partir das equações às diferenças é imediata

ay(n-2)+by(n-1)+cy(n)=0

$\Rightarrow$ *y(n) = -a/c y(n-2) -b/c y(n-1) =0*



43

Equações às diferenças - Parte forçada

- O sinal de entrada atrasado pode ser obtido com um tap-delay, implementado como um conjunto de flip-flops (um registo de deslocamento) ou simulado com uma matriz

Resposta impulsiva finita - FIR

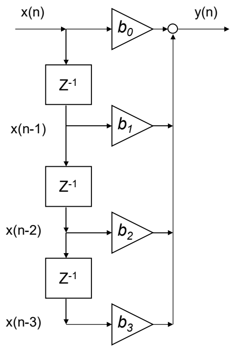
- Exercício:
  - Simular em Excel, e depois em Matlab, o sistema caracterizado por

a) *y(n)=1/3 x(n)+1/3 x(n-1)+1/3 x(n-2)*

b) *y(n)= 0.5 x(n) + 0.5 y(n-1)*

quando recebe as seguintes entradas

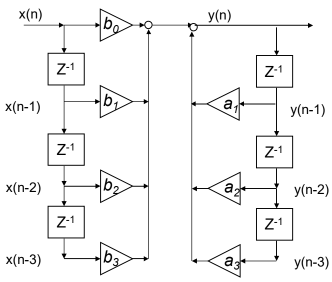
x(n) = d(n)	*x(n) = u(n)*
x(n) = n	*x(n) = sin(0,1×n)*



44

Equações às diferenças

- Estrutura de um filtro genérico
- FIR
  - Finite Impulse Response
  - Tem atrasos da entrada
- IIR
  - Infinite Impulse Response
  - Tem atrasos da saída



45

Transformadas de Fourier e Fourier Discreta

46

Domínio da frequência

- Qualquer sinal (1) pode ser decomposto numa soma de exponenciais complexas
  - Uma exponencial complexa é a soma de um seno com um coseno

  $e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j \sin(\omega n)$

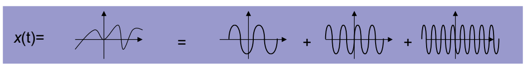
- A decomposição em senos e cosenos é muito útil pois são são funções próprias de SLITS: a *forma* de onda de saída é idêntica à da entrada, diferindo apenas a *amplitude e fase*

  - Facilidade de caracterização: bastam dois parâmetros

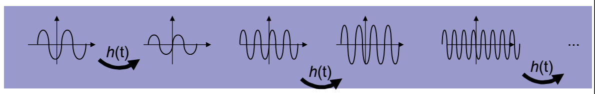
47

Motivação para a transformada de Fourier

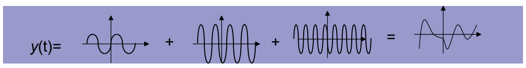
- Para calcular a resposta de um SLIT a um sinal
  - Partir o sinal em vários sinais sinusoidais



  - Calcular o modo como o SLIT responde a cada um deles



  - **Somá-los**



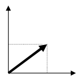
48

Acústica – Processamento de Sinal

4ºAno EN-AEL, 3ºAno M

Motivação para a transformada de Forier

- Como partir um sinal em sinusoides ?
  - Ver quão semelhante é o sinal a cada seno
  - Fazer a projecção do sinal sobre "eixos de sinusoides"



  - **Produto interno de vectores** -> **produto interno de sinais**
    - Os sinais discretos até são vectores !

49

Definição da transformada de Fourier

- Definição:

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{-j\omega n} d\omega$$

Frequências discretas variam entre $-\pi$ e π

sinais contínuos

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

50

Comentários sobre a Transf. de Fourier

- Domínio do tempo vs Domínio da frequência
  - Corresponde a olhar para a mesma coisa segundo ângulos diferentes
  - Podemos passar de um domínio para o outro sem perder informação
  - A representação no domínio da frequência chama-se ESPECTRO DE FREQUÊNCIA

Domínio do tempo

$$x(t) \longrightarrow h(t) \longrightarrow y(t)$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$ Transformada de Fourier

$$X(\omega) \longrightarrow H(\omega) \longrightarrow Y(\omega)$$

Domínio da frequência

51

Existência da transformada

- Os somatórios/integrais podem divergir
  - A transformada não existe nesses casos (ou é infinita...)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

- **Condições SUFICIENTES**
  - **Condiçoes de Dirichelet:**
    - **→x(t) é absolutamente somável/integrável**
    - **→No caso contínuo, x(t) tem que ter um número finito de máximos/mínimos, e um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo finito**
      - **(sempre verificado no caso discreto)**
- **Outros casos**
  - **Usando funções de Dirac é possível calcular a transformada de muitos mais sinais (senos/cosenos,escalões, funções contínuas**

52

Comentários sobre a Transf. de Fourier

- Grande simplificação:
  - Transforma convoluções em multiplicações
  - Convolução de sinais no tempo = Multiplicação das suas transformadas no tempo !

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(t) h(t-\tau) \Leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$$

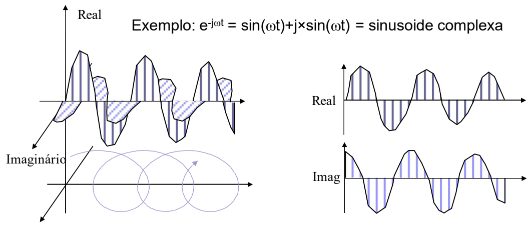
  - O cálculo da resposta de um SLIT a uma dado sinal de entrada torna-se muito fácil se formos capazes de passar de/para o domínio da frequência

53

Comentários sobre a Transf. de Fourier

- Grande complicacação:
  - A transformada de um sinal real é um sinal complexo
  - Cada ponto no espectro é caracterizado por uma magnitude uma fase (ou parte real/parte imaginária)

Exemplo: $e^{-j\omega t} = \sin(\omega t) + j \times \sin(\omega t)$ = sinusoide complexa



Visão tri-dimensional　　Visão catesiana

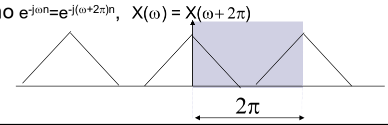
54

Acústica – Processamento de Sinal

4ºAno EN-AEL, 3ºAno M

Transf. de Fourier de sinais discretos

- Ideia base:
  - Ver quão semelhante é o sinal em causa com cada uma das sinusóides
  - Medida de similitude: produto interno
    - A componente de frequência *x* é o produto interno (ponto a ponto), entre o sinal e o seno dessa frequência !
- A transformada de um sinal discreto é uma função contínua !
  - Não dá jeito nenhum… vamos ter que a calcular num conjunto finito de pontos
- O espectro de um sinal discreto é periódico !
  - Como $e^{-j\omega n}=e^{-j(\omega+2\pi)n}$, $X(\omega) = X(\omega+2\pi)$



55

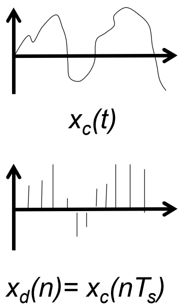
Ponto da situação com MATLAB

- Exercício:
  - Rotina para calcular a convolução entre 2 sinais
    - Poderemos calcular a saída de um SLIT quando excitado com um sinal qualquer
  - Rotina para calcular a transformada de Fourier num dado ponto (frequência)
    - Poderemos calcular o espectro de um sinal num conjunto arbitrário de pontos
    - Poderemos calcular a saída de um SLIT quando excitado com um sinal qualquer

56

Amostragem

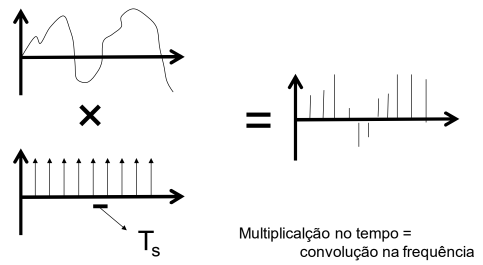
- Questões:
  - Com que periodicidade devo amostrar sinais contínuos quando estou a convertê-los em digitais ?
  - Qual a relação entre a frequência "real" do sinal, e a "frequência digital" ?
  - Qual a relação entre "*n*" e "*t*"
- Conceito de período/frequência de amostragem
  - Intervalo entre 2 amostras = T_s (T_{Sample})
  - $1/T_s$ = f_s=Frequência de amostragem



57

Amostragem

- Se multiplicar o sinal analógico por um "pente de Diracs", obtenho o digital !



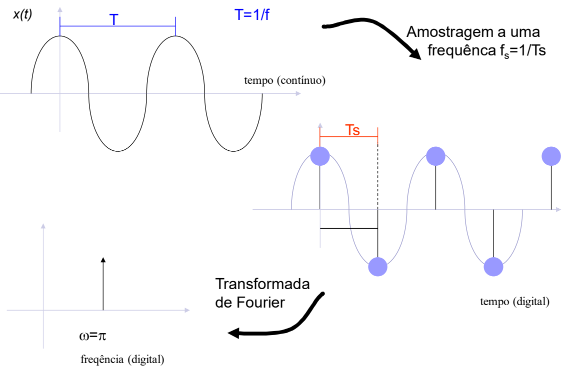
58

Frequência em contínuo e em digital

- Qual a relação entre frequência de um sinal contínuo e desse mesmo sinal amostrado ?
  - EXPLICAÇÃO INTUITIVA
    - <u>Sabemos</u> que 2 frequências que diferem em 2π serão rigorosamente idênticas quando amostradas.
    - <u>Sabemos</u> que de $\omega=\pi$ a 2π a "taxa de variação" diminui
    - <u>Sabemos</u> que $\omega=\pi$ corresponde à maior frequência digital possível
    - Sabemos que no domínio do tempo, o sinal digital de maior frequência é aquele em que duas amostras consecutivas têm sempre sinal contrário e a mesma amplitude (pente alternado)
    - <u>Sabemos</u> que o pente alternado tem uma frequência de $1/(2^*Ts)=f_s/2$, e quem um sinal digital de frêquência π é um pente alternado !
    - <u>Logo</u>, um sinal contínuo de <u>frequência $f_s/2$</u>, quando amostrado com uma frequência f_s, tem uma <u>frequência digital π</u>.

59

E agora os bonecos…



60

Acústica – Processamento de Sinal

4ºAno EN-AEL, 3ºAno M

Para quem esteve a dormir…

- Regra de 3 simples…

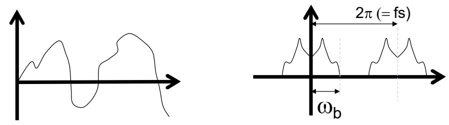
$f_{contínuo} = fs/2 \leftrightarrow f_{digital} = \pi = 3.1416…$

$$\frac{fs/2}{f_{contínuo}} = \frac{\pi}{f_{digital}}$$

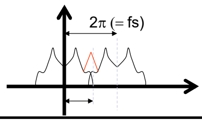
- **Para os que ainda mais "distraídos":**
  - $-f_{digital} = f_{contínua} \times 2\pi/fs$
  - $-f_{contínua} = f_{digital} \times fs/2\pi$

61

Consequências da amostragem



- Se o sinal original fôr limitado em frequência, tendo uma largura de banda de ω_b, é possível obter o seu espectro sem erros.
- Se se diminuir a frequência de amostragem, há o risco do espectro "interferir com si próprio"



62

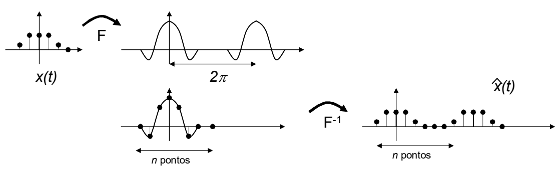
Teorema da Amostragem

- Só é possível amostrar um sinal sem perder nenhuma das suas características se ele for limitado em frequência
- Para não perder nenhuma característica (e ser possível reconstruir o sinal sem erro) é necessário amostrá-lo com uma frequência de amostragem pelo menos 2 vezes superior à sua largura de banda
- $2 \times \omega_b$ = frequência de Nyquist
- Frequência de amostragem mais baixa:
  - Altas frequências interferem nas baixas
  - Haverá "ALIASING" no domínio do tempo

63

Amostragem em frequência

- Amostrar lentamente no tempo – **aliasing na frequência**
- Amostrar lentamente na frequência – **aliasing no tempo**



- Amostragem de modo a não perder informação:
  - USAR TANTOS PONTOS NA FREQUÊNCIA COMO NO TEMPO

64

Mais comentários...

- Aumentar a frequência de amostragem:
  - Aumenta a largura de banda que podemos amostrar sem erros
  - A frequência digital corresponde a frequências cada vez maiores
- Aumentar o número de pontos amostrados no tempo:
  - Aumenta a resolução em frequência
  - Quanto mais tempo tenho para amostrar, melhor distingo frequências próximas

65

Propriedades da Transformada de Fourier

- Dado $F(x(t)) = X(\omega)$
- Linearidade
  $$x(t) = ay(t) + bz(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = aY(\omega) + bZ(\omega)$$
- Deslocamento no tempo
  $$x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{j\omega t_0} X(j\omega)$$
- Simetria do conjugado
  $$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-\omega)$$
  - Mas se x(t) for real, x*(t)=x(t) logo X(ω)=X*(-ω)
  - Se X(ω)=X*(-ω) então
    - PARA SINAIS REAIS, o espectro de potência é um sinal PAR

66

Acústica – Processamento de Sinal

4ºAno EN-AEL, 3ºAno M

Propriedades da Transformada de Fourier

- Diferenciação $\dfrac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(\omega)$

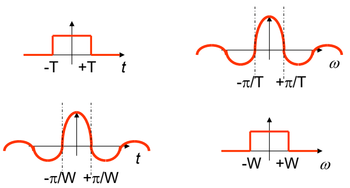
- Integração
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

- Multiplicação (modulação)
$$r(t) = s(t)p(t) \xleftrightarrow{F} R(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(S(\omega) * P(\omega)\right)$$

67

Propriedades da Transformada de Fourier

- Relação de Parseval (Conservação da energia)
$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$
- Pares notáveis de sinais/transformadas
  - Para não andar a fazer contas…consultar TABELAS!
  - Exemplo:
    - Pulso quadrado ↔ Sinc



68

Transformada Inversa

- Transformada Inversa
  - Recupera o sinal a partir da sua transformada

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad \Longleftrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)e^{-j\omega t}d\omega$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \Longleftrightarrow \quad x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(\omega)e^{-j\omega n}d\omega$$

69

Cálculo da transformada

- Há uma série de simetrias que fazem com que os mesmos coeficientes sejam usados várias vezes
  - SIN(x)=COS(π/2-x)
  - Há várias técnicas, mas todas elas reduzem drasticamente o tempo de cálculo
  - FFT – Fast Fourier Transform
    - A partir da definição → n^2
    - Com FFT → n log(n)
  - Semelhança entre transformada directa e inversa
    - As rotinas de FFT com pequenas alterações calculam também a transformada inversa
- Exercício em MATAB
  - Imagine que um dado radar transmite um sinal da seguinte forma: x(t)=4sin(4E9/2π * t)+sin(2.3E6//2π * t)
  - Calcule numericamente o espectro desse sinal (com 1024 pontos) usando directamente a definição de transformada e usando a rotina FFT do matlab. Calcule a diferença de tempo gasto em cada uma das opções

70

71