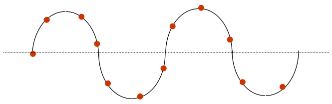
Análise Numérica (4)
Interpolação

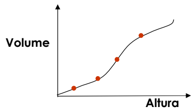
V1.0, Victor Lobo, 2004

Interpolação

- **Problema a resolver:**
  - Dada uma tabela de pontos que pertencem a uma função...
  - Encontrar o valor dessa função noutro ponto.
- **Exemplo**
  - Tabela de marés



  - Tabela de enchimento de tanques

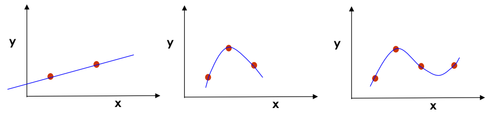


X	Y
1	3
2	6
3	11

  - Qualquer tabela...

Interpolação polinomial

- **Vamos assumir que a função original é um polinómio.**
- **Qualquer função analítica pode ser aproximada com um erro arbitrariamente pequeno por um polinómio de grau** *suficientemente grande*...
  - Série de Taylor



- **Dado um conjunto** *n* **de pontos, é sempre possível encontrar um (e um só) polinómio de grau** *n-1* **que passa exactamente por esses pontos.**

Porquê polinómios...

- **Vantagens em interpolar com polinómios**
  - Facilmente integráveis
  - Facilmente diferenciaveis
  - Fácil obter majorantes de erros
  - São funções "bem comportadas"
- **Podemos usar outras funçõs interpoladoras ?**
  - Claro !

Polinómio Interpolador

- **Dado um conjunto de** *n* **pontos (** (x_0,y_0), (x_1,y_1)... **), chama-se** ***polinómio interpolador*****, ou** ***polinómio de colocação*** **da função** $y=f(x)$ **ao polinómio** $p(x)$ **tal que:**
  - Para todo o i, $p(x_i)=f(x_i)=y_i$
- **Como encontrar os coeficientes desse polinómio ?**
- **Solução "directa"**
  - Tranformar a tabela num sistema de equações lineares, e resolvê-lo pelo método de Gauss
  - Exemplo:

X	Y
1	3
2	6
3	11

y=Ax²+Bx+C

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \\ 9 & 3 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

  - Problema: demasiadas contas...

Interpolação polinomial - Lagrange

- **Ideia base**
  - Dados *n* pontos, vamos obter uma série de *n* polinómios de tal modo que cada um deles se anula em todos os pontos conhecidos menos 1.
  - O polinómio interpolador será a soma desses polinómios
- **Dado um conjunto de** *n* **pontos (** (x_0,y_0), (x_1,y_1)... **), o polinómio de lagrange correspondente ao ponto** *i* **é**

$$L_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})\times 1\times(x-x_{i+1})\ldots(x-x_{n-1})(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\ldots(x_i-x_{i-1})\times 1\times(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_{n-1})(x_i-x_n)}$$

$x=x_i \Rightarrow L(x)=1$

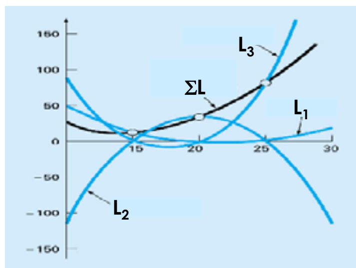
$x=x_{j\neq i} \Rightarrow L(x)=0$

O numerador é um polinómio de grau n-1

O denominador é uma constante

Interpolação polinomial - Lagrange

- **Multiplicando cada polinómio de Lagrange pelo valor da função do ponto correspondente faz com que**
- **Soma dos polinómios**
  - $P(x)=L_0(x)y_0+ L_1(x)y_1+ L_2(x)y_2+\ldots+ L_n(x)y_n$



Análise Numérica (4)
Interpolação

V1.0, Victor Lobo, 2004

Exemplo

- Seja a função dada por

X	Y
1	4
2	13
3	26

Qual o polinómio interpolador ?

7

Polinómio interpolador - Newton

- Também chamado método das diferenças divididas
- Problemas com o método de Lagrange
  - Se tivermos mais um ponto temos que recalcular tudo
- Ideia base
  - Vamos somar polinómios de grau cada vez maior
  - Com 2 pontos vamos obter uma recta. Com o terceiro ponto vamos somar uma parábola que se anula nos dois pontos anteriores. Com o quarto...
- Se $P_{n-1}(x)$ interpola n pontos então

  $P_n(x)=P_{n-1}(x)+A_n(x)$ interpola em $n+1$, desde que

  $A_n(x)=a_n(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})$, e

$$a_n = \frac{y_n - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})}$$

8

Polinómio interpolador - Newton

$$a_n = \frac{y_n - p_{n-1}(x_n)}{(x_n - x_0)(x_n - x_1)...(x_n - x_{n-1})}$$

- Para apenas 1 ponto:
  - $P_0(x)=y_0$
- Para 2 pontos:
  - $P_1(x) = P_0(x) + A_1(x) = P_0(x) + a_1(x-x_0) = P_0(x) + \underbrace{(y_1-y_0)/(x_1-x_0)}_{\text{Diferença dividida de 1ª ordem}} \times (x-x_0)$

Diferença dividida de 1ª ordem

- Diferença dividida de ordem 0
  - O próprio valor da função
- Diferença dividida de 1ª ordem
  - Diferença na função a dividir pela diferença nos argumentos (1ª derivada !)
- Diferença dividida de 2ª ordem
  - Diferença dividida da diferença dividida (2ª derivada!)

9

Diferenças dividas

x	f(x)	D1	D2	D3	D4
x_0	y_0	d_{10}	d_{20}	d_{30}	d_{40}
x_1	y_1	d_{11}	d_{21}	d_{31}	
x_2	y_2	d_{12}	d_{22}		
x_3	y_3	d_{13}			
x_4	y_4				

$$d_{km} = \frac{d_{k-1,m+1} - d_{k-1,m}}{x_{m+k} - x_m}$$

$$p(x) = d_0 + d_{10}(x-x_0) + d_{20}(x-x_0)(x-x_1) + ... + d_{n0}(x-x_0)(x-x_1)...(x-x_{n-1})$$

10

Exemplo

x	f(x)	D1	D2	D3	D4
2	13				
3	78				
4	253				
5	622				
6	1293				

- Qual o polinómio que interpola estes pontos ?

11