

Análise Numérica (7)

Integração e diferenciação

V1.0, Victor Lobo, 2004

Integração numérica

• Porque é um problema importante ?

- Em muitos problemas não temos expressões analíticas mas sim séries de medições
 - Forma e dimensões de balizas ⇒ cálculo de deslocamento
 - Medições de velocidade ⇒ cálculo de distância
- Não existe expressão analítica para a primitiva da maior parte das funções !
 - $\int e^{-x^2}$ $\int \frac{1}{\log(x)}$ $\int \frac{\sin(x)}{x}$
 - Por vezes, mesmo existindo solução analítica, a solução numérica é mais fácil

Integração numérica

• Ideias base:

- Em vez de integrar a função pretendida, vamos integrar uma função parecida que seja mais fácil de integrar.
 - Os polinómios são funções fáceis de integrar !

$$\int_a^b f(x) \approx \int_a^b p(x)$$

- Um integral é o limite de um somatório
 - $\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{x_i=a}^{x_i=b} f(x_i)(x_i - x_{i-1})$

Aproximação "de ordem 0"

• Aproximar o integral por um somatório assumindo que a função é constante entre os pontos calculados:

- Pode ser por defeito ou por excesso...

Fórmulas de Newton-Cotes

• Assumem que a função a integrar é polinomial

- Polinómio de grau 1 - Regra dos trapézios
- Polinómio de grau 2 - Regra de Simpson
- Polinómio de grau 3 - Regra de 3/8
- Polinómio de grau 4 - Regra de 14/45 (ou de Bode)
- (pode-se usar qualquer grau...)

• Divide-se o intervalo a integrar em intervalos mais pequenos, encontra-se o polinómio interpolador de grau n para cada $n+1$ pontos, e integra-se esse polinómio

• O erro depende da largura dos intervalos e do valor da derivada de ordem superior

• As fórmulas finais são fáceis de obter...

Regra dos trapézios

• Regra dos trapézios

- Em cada intervalo h , $f(x)$ é uma recta
- Área de cada intervalo: $\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx \approx \frac{f(x_0) + f(x_1)}{2} h$
- Área total: $\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_{n-1}} p(x) dx \approx \left(\frac{f(x_0) + f(x_{n-1})}{2} + \sum_{i=1}^{n-2} f(x_i) \right) h$

Regra de Simpson

• Regra de Simpson

- Em cada intervalo $2h$, $f(x)$ é uma parábola
- São necessários 3 pontos em cada intervalo
- Área de cada intervalo: $\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx \approx \frac{h}{3} (f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2))$
- Área total: $\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_{n-1}} p(x) dx \approx \frac{h}{3} \left(f(x_0) + f(x_{n-1}) + 4 \sum_{i=1}^{n-2} f(x_i) + 2 \sum_{i=2}^{n-2} f(x_i) \right)$

Análise Numérica (7)

Integração e diferenciação

V1.0, Victor Lobo, 2004

Regra de 3/8

Integração

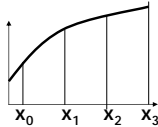
• Regra de 3/8

- Em cada intervalo $3h$, $f(x)$ é um polinómio do 3º grau
- São necessários 4 pontos em cada intervalo
- Área de cada intervalo:

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_3} p(x) dx = \frac{3}{8} h (f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3))$$

- Área total:

$$\int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x) dx \approx \int_{x_0}^{x_{n-1}} p(x) dx = \frac{3}{8} h \left(f(x_0) + f(x_{n-1}) + 2 \sum_{i=3k+1} f(x_i) + 3 \sum_{i \neq 3k+1} f(x_i) \right)$$



7

Outros problemas

Integração

• Qual a melhor forma de Newton-Cotes ?

- Depende da função a integrar... de quão parecida é com cada um dos polinómios interpoladores

• Pontos não equiespaçados

- Torna-se mais difícil obter uma fórmula simples para o resultado, mas este pode ser mais preciso
- Método dos COEFICIENTES INDETERMINADOS
→ Equivalente a fazer caso a caso todas as contas necessárias para a interpolação seguida de integração

• Escolha óptima dos pontos

- Método da quadratura de Gauss
- Escolhe os melhores pontos para calcular a função

• Interpolação por Fourier...

8

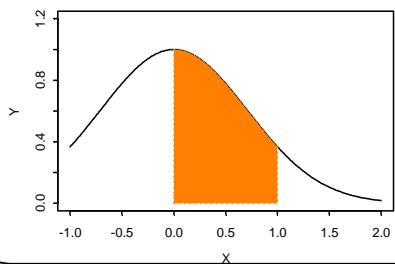
Exemplo

Integração

• Vamos tentar calcular

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

- Usando o mínimo número de valores (para cada método)

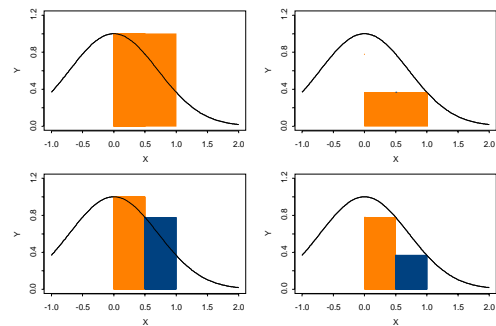


9

Exemplo

Integração

• Aproximação "de ordem 0" por excesso e por defeito

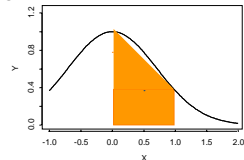


10

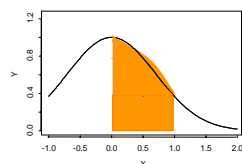
Exemplo

Integração

• Regra dos trapézios



• Regra de Simpson



Parábola

11

Exemplo

Integração

• Resultados:

- Regra dos trapézios 0.68394
- Regra de Simpson 0.74718
- Regra de Bode 0.74683
- "Exacto": 0.74682 !

12

Análise Numérica (7)

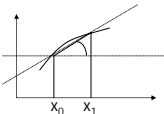
Integração e diferenciação

V1.0, Victor Lobo, 2004

Derivação

Derivação

- É numericamente muito mais instável
 - Tem subtrações e divisões...
- Ideias gerais
 - Substituir por uma função facilmente diferenciável
 - Interpolador com polinómio, diferenciar esse polinómio
 - Derivadas são diferenças
- Com 2 pontos



$$f'(x_0) = f'(x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{h}$$

13

Derivação

Derivação

- Com 3 pontos

$$f'(x_0) = \frac{1}{2h}(-3f(x_0) + 4f(x_1) - f(x_2))$$

$$f'(x_1) = \frac{1}{2h}(-f(x_0) + f(x_2))$$

$$f'(x_2) = \frac{1}{2h}(f(x_0) - 4f(x_1) + 3f(x_2))$$

14