

Análise Numérica (8)

Equações diferenciais

V1.0, Victor Lobo, 2004

Eq.Diferenciais

Eq.Diferenciais

- **Porquê resolver numericamente ?**

- Muitos sistemas são descritos por equações diferenciais
 - Transientes em circuitos electrónicos
 - Baixas em combate
 - Comportamento de populações
- A maior parte dessas equações não tem solução analítica...

- **O que é uma equação diferencial ?**

- É uma equação que relaciona uma variável livre, uma função dessa variável, e derivadas dessa função.

→ Exemplo:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F \times \cos(\omega t)$$

- **O que é uma solução dessa equação ?**

- É uma função ! $x(t) = t \times \text{seno}(\omega t)$

1

Alguns tipos de equações diferenciais

Eq.Diferenciais

- **Equação Diferencial Ordinária de 1ª ordem (EDO de 1ª ordem)**

- $F(x, y, y') = 0$, onde
 - $y = f(x)$ (por vezes chama-se $y(x)$)
 - $y' = dy/dx$ (derivada de y em ordem a x)
 - Na forma mais simples escreve-se como $y' = g(x, y)$

- **Equação Diferencial Ordinária de ordem 2, 3..n**

- $F(x, y, y', y'', y''' \dots) = 0$, onde
 - $y'' = d^2y/dx^2$ (2ª derivada de y em ordem a x)

- **Equação Diferencial com derivadas parciais**

- $F(x, t, y, \partial y/\partial x, \partial y/\partial t) = 0$

2

Análise Numérica (8)

Equações diferenciais

V1.0, Victor Lobo, 2004

Tipos de soluções

Eq.Diferenciais

- Euler

- A partir de um dado ponto, aproximar a equação diferencial por uma equação às diferenças e prever o ponto seguinte
- É o método mais simples, mais próximo da definição
- Os erros são grandes se o passo não for muito pequeno

- Runge-Kutta

- A partir dos dados em vários pontos, calcular mais um ponto.
- É o método mais usado porque tem muito rigor e não tem demasiadas contas
- Há várias variantes (normalmente usa-se Runge-Kutta de 4ª ordem)

- Multipasso

- É necessário fazer várias iterações para cada ponto
- São lentos...
- Milne, Adams-Moulton, etc

3

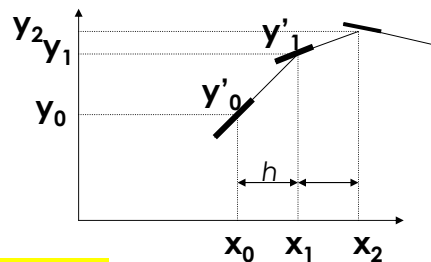
Victor Lobo

Método de Euler

Eq.Diferenciais

- Ideia geral:

- Sabemos um valor inicial de y_0 e x_0
- Sabemos a função que rege y' , logo sabemos y'_0
- Logo...
 - $\rightarrow y_1 = y_0 + hy'_0$
- onde h é o passo.



- Erros

$$\rightarrow y_1 = y_0 + hy'_0 + \frac{h^2}{2} y''(c)$$

4

Victor Lobo

Análise Numérica (8)

Equações diferenciais

V1.0, Victor Lobo, 2004

Métodos de Runge-Kutta

Eq.Diferenciais

- **Ideia geral**

- Os erros de Euler são devido ao facto de a derivada se alterar ao longo do intervalo h .
- Vamos calcular a derivada em diversos pontos, e ponderar os diversos valores:

- $y_{n+1} = y_n + h(A_1K_1 + A_2K_2 + \dots)$

- **Runge-Kutta**

- de 4ª ordem
- Erro $O(h^5)$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = f(x_n, y_n)$$

$$K_2 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_1\right)$$

$$K_3 = f\left(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}K_2\right)$$

$$K_4 = f(x_n + h, y_n + hK_3)$$

5

Problemas de Integração

Eq.Diferenciais

- **Um navio regista as seguintes velocidades, medidas em nós de 10 em 10 minutos:**

- 1, 2, 4, 7, 12, 14, 16, 16, 16, 16, 10, 0

- Estime a distância percorrida usando métodos de ordem 0, 1 e 2.
- Compare os resultados obtidos com os diferentes métodos.

- **Num problema que resolveu em tempos, calculou a equação do balanço amortecido de um navio sujeito a um impacto súbito. Imagine agora que o fluxo de água a entrar é proporcional à inclinação. Calcule quanta água entra durante o primeiro balanço.**

6