

Análise Numérica (8)

Equações diferenciais

V1.0, Victor Lobo, 2004

Eq.Diferenciais

Eq.Diferenciais

- **Porquê resolver numericamente ?**
 - Muitos sistemas são descritos por equações diferenciais
 - Transientes em circuitos electrónicos
 - Baixas em combate
 - Comportamento de populações
 - A maior parte dessas equações não tem solução analítica...
- **O que é uma equação diferencial ?**
 - É uma equação que relaciona uma variável livre, uma função dessa variável, e derivadas dessa função.
 - Exemplo: $\frac{d^2x}{dt^2} + kx = F \times \cos(\omega t)$
- **O que é uma solução dessa equação ?**
 - É uma função! $x(t) = t \times \text{seno}(\omega t)$

1

Alguns tipos de equações diferenciais

Eq.Diferenciais

- **Equação Diferencial Ordinária de 1º ordem (EDO de 1º ordem)**
 - $F(x,y,y')=0$, onde
 - $y=f(x)$ (por vezes chama-se $y(x)$)
 - $y'=dy/dx$ (derivada de y em ordem a x)
 - Na forma mais simples escreve-se como $y'=g(x,y)$
- **Equação Diferencial Ordinária de ordem 2,3..n**
 - $F(x,y,y',y'',y'''\dots)=0$, onde
 - $y''=d^2y/dx^2$ (2ª derivada de y em ordem a x)
- **Equação Diferencial com derivadas parciais**
 - $F(x, t, y, \partial y/\partial x, \partial y/\partial t)=0$

2

Tipos de soluções

Eq.Diferenciais

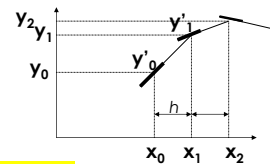
- **Euler**
 - A partir de um dado ponto, aproximar a equação diferencial por uma equação às diferenças e prever o ponto seguinte
 - É o método mais simples, mais próximo da definição
 - Os erros são grandes se o passo não for muito pequeno
- **Runge-Kutta**
 - A partir dos dados em vários pontos, calcular mais um ponto.
 - É o método mais usado porque tem muito rigor e não tem demasiadas contas
 - Há várias variantes (normalmente usa-se Runge-Kutta de 4º ordem)
- **Multipasso**
 - É necessário fazer várias iterações para cada ponto
 - São lentos...
 - Milne, Adams-Moulton, etc

3

Método de Euler

Eq.Diferenciais

- **Ideia geral:**
 - Sabemos um valor inicial de y_0 e x_0
 - Sabemos a função que rege y' , logo sabemos y'_0
 - Logo...
 - $y_1 = y_0 + h y'_0$
 - onde h é o passo.



- **Erros**
 - $y_1 = y_0 + h y'_0 + h^2/2 y''(c)$

4

Métodos de Runge-Kutta

Eq.Diferenciais

- **Ideia geral**
 - Os erros de Euler são devido ao facto de a derivada se alterar ao longo do intervalo h .
 - Vamos calcular a derivada em diversos pontos, e ponderar os diversos valores:
 - $y_{n+1} = y_n + h(A_1 K_1 + A_2 K_2 + \dots)$
- **Runge Kutta**
 - de 4º ordem
 - Erro $O(h^5)$
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

$$K_1 = f(x_n, y_n)$$

$$K_2 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} K_1)$$

$$K_3 = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} K_2)$$

$$K_4 = f(x_n + h, y_n + h K_3)$$

5

Problemas de Integração

Eq.Diferenciais

- **Um navio regista as seguintes velocidades, medidas em nós de 10 em 10 minutos:**
 - 1, 2, 4, 7, 12, 14, 16, 16, 16, 10, 0
 - Estime a distância percorrida usando métodos de ordem 0, 1 e 2.
 - Compare os resultados obtidos com os diferentes métodos.
- **Num problema que resolveu em tempos, calculou a equação do balanço amortecido de um navio sujeito a um impacto súbito. Imagine agora que o fluxo de água a entrar é proporcional à inclinação. Calcule quanta água entra durante o primeiro balanço.**

6