Soluções para os problemas de Métodos Numéricos

(interpolação)

5.I

Tendo 3 pontos, podemos encontrar um polinómio interpolador do 2º grau que passa nesses 3 pontos. Como sabemos que a trajectória é parabólica, esse polinómio irá de facto descrever a trajectória da granada. As raízes desse polinómio serão o ponto de lançamento e o ponto de impacto da granada.
Vamos então começar por encontrar o polinómio interpolador. Nas aulas demos 2 métodos: o dos polinómios de Lagrange, e o das diferenças divididas (ou método de interpolação de Newton). Para o primeiro tiro podemos usar, por exemplo, o método de Lagrange:

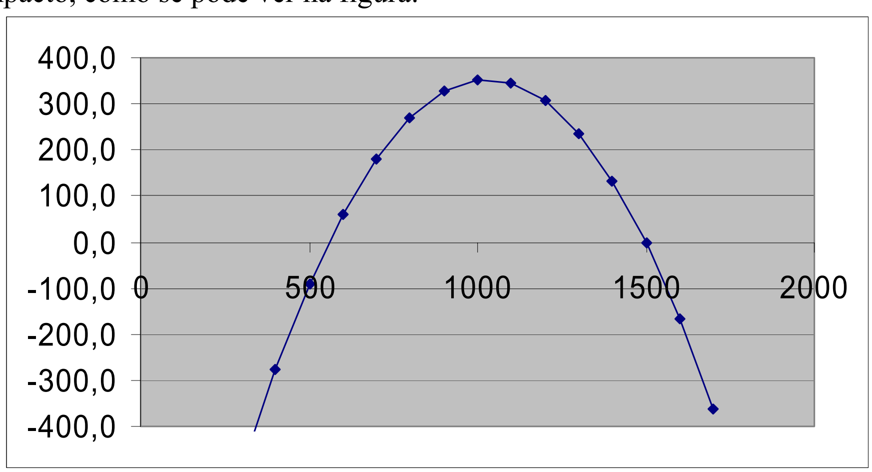
$$L_0(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} = \frac{(x-1166{,}6)(x-1000{,}0)}{(1333{,}3-1166{,}6)(1333{,}3-1000{,}0)} = \frac{x^2+(-1000{,}0-1166{,}6)x+(1000{,}0*1166{,}6)}{166.7\times 333.3}$$
$$= \frac{x^2-2166{,}7x+1166600}{55527{,}78}$$

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} = \frac{(x-1333{,}3)(x-1000{,}0)}{(1166.6-1333.3)(1166.6-1000.0)} = \frac{x^2+(-1333{,}3-1000{,}0)x+(1333{,}3*1000{,}0)}{-27772{,}22}$$
$$= \frac{x^2-2333{,}3x+1333300}{-27772{,}22}$$

$$L_2(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} = \frac{(x-1333{,}3)(x-1166{,}6)}{(1000{,}0-1333{,}3)(1000{,}0-1166{,}6)} = \frac{x^2+(-1166{,}6-1333{,}3)x+(1333{,}3*1166{,}6)}{55527{,}7}$$
$$= \frac{x^2-2500{,}0x+1555561{,}11}{55527{,}7}$$

$$P(x) = y_0L_0(x)+y_1L_1(x)+y_2L_2(x) =$$
$$= 205.3\frac{x^2-2166{,}7x+1166600}{55527{,}78}+322.5\frac{x^2-2333{,}3x+1333300}{-27772{,}22}+351.4\frac{x^2-2500{,}0x+1555561{,}11}{55527{,}7}$$
$$= -0{,}00159x^2+3{,}2727x-1330{,}88$$

A equação encontrada é, como seria de esperar, uma parábola "virada para baixo", e as raízes dessa parábola correpondem aos pontos onde a granada está ao nível do mar, ou seja o ponto onde é lançada, e o ponto de impacto, como se pode ver na figura:



As raízes da uma equação do 2º grau podem ser obtidas com a formula resolvente, dando origem neste caso a raízes em 557,92 e 1499,77. Assim sendo a granada foi lançada a cerca de 1500 m de distância, e irá cair a cerca de 550 do navio.

Para o 2º tiro podemos usar o mesmo método ou o método das diferenças divididas, e vamos optar pelo este segundo.

Começemos por construir a tabela de diferenças dividas:

X	Y	f1	f2
1429,3	65,8	-0,65347	-0,00098
1217,2	204,4	-0,23798	
1005	254,9		

Podemos agora obter o polinómio através da expressão:

$$p(x) = d_0 + d_{10}(x - x_0) + d_{20}(x - x_0)(x - x_1) = Y + f1_0(x - x_0) + f2_0(x - x_0)(x - x_1)$$

Ficando assim

$$\begin{aligned} p(x) &= 65{,}8 - 0{,}65347\ (x\text{-}1429{,}3)\text{-}0{,}00098\ (x\text{-}1429{,}3)\ (x\text{-}1217{,}2) \\ &= -0{,}00098\ x^2 + 1{,}938036\ x - 703{,}79 \end{aligned}$$

As raízes dessa equação são x= 479,14 ou x=1500,02, ou seja o ponto de lançamento está a cerca de 1500m.

b) Estando os pontos de lançamento calculados muito próximos um do outro (ambos a cerca de 1500m) , é razoável assumir que há apenas um morteiro.

c) O alcance máximo é atingido com um ângulo de tiro de 45º. Vamos começar por calcular os ângulos de lançamento dos doi tiros que observámos. Para o primeiro tiro temos altura= -0,00159 x^2 + 3,2727 x – 1330,88, ou derivando ficamos com inclinação = -0,00318 x + 3,2727. Assim sendo a inclinação a 1500m será f'(1500) = -1,4987.
Para o outro tiro, temos a altura== -0,00098 x^2 +1,938036 x -703,79, logo a inclinação = -0,0019 x + 1,93, logo f'(1500)= -0,9996. Sendo este valor práticamente igual a 1, o morteiro já está a fazer fogo para o seu alcance máximo, logo o navio está seguro.

d) Ter mais informação é sempre útil, e com mais pontos poderemos obter uma estimativa mais precisa da posição de lançamento. Podemos fazê-lo de várias formas:

1) Selecionar vários conjuntos de 3 pontos, calcular as raízes para cada um desses conjuntos, e depois calcular a média desses valores.
2) Usar o método das diferenças divididas para tentar confirmar que as diferenças de ordem superior a 2 são despresáveis.
3) Se os diversos pontos não estiverem exactamente sobre uma parábola usar o método dos mínimos quadrados para obter a melhor aproximação possível.