Análise de Sinais

2º ano da licenciatura em

Engenharia Naval – Ramo de Armas e electrónica

Doutor Victor Lobo

Programa (1/2)

- **1 – Introdução a Sinais e Sistesmas**
  - **→(Cap.1 Louretie)(Cap.1 Haykin)(Cap.1 Ribeiro)**
  - **1. Origem e medição de sinais.**
  - **2. Sinais contínuos básicos**
  - **3. Sinais discretos básicos**
  - **4. Propriedades básicas de sinais**
  - **5. Sistemas físicos, e modelos**
  - **6. Representação matemática de sistemas e propriedades**
- **1b – Introdução ao Matlab**
  - **→(Batel Anjo)**
  - **1. Variáveis e instruções básica**
  - **2. Representação, visualização, e manipulação de sinais**
  - **3. Toolbox de processamento de sinal**
  - **4. Aquisição de sinais**
- **2 – Sistemas lineares e invariantes no tempo – SLITs**
  - **→(Cap.2 Louretie)(Cap.2 Haykin)(Cap.1,2 Ribeiro)**
  - **1. Introdução**
  - **2. Resposta impulsiva**
  - **3. Respresentação com equações diferenciais**
  - **4. Respresentação com equações às diferenças**

Programa (2/2)

- **3 – Transformadas de Fourier e Fourier Discreta**
  - →(Cap.3,4 Louretie)(Cap.3,6 Haykin)(Cap.3 Ribeiro)
  - 1. Introdução
  - 2. Transformada de Fourier
  - 3. Transformada de Fourier discreta
- **4 –Transformadas de Laplace e Z**
  - →(Cap.3,4 Louretie)(Cap.3,7 Haykin)(Cap.3 Ribeiro)
  - 1. Introdução
  - 2. Transformada de Laplace
  - 3. Transformada Z
- **5 – Análise no domínio da frequência**
  - →(Cap.6 Louretie)(Cap3. Haykin)(Cap.2 Ribeiro)
  - 1. Introdução
  - 2. Resposta na frequência de SLITs contínuos e causais
  - 3. Resposta na frequência de SLITs discretos e causais

Avaliação

- **Provas escritas**
  - 2 Repetições escritas 2 x Coeffciente 10
  - Exame só para quem não tem aproveitamento nas provas de frequência
  - É permitida a utilização durante as provas de uma folha préviamente preparada pelo aluno
    - →A folha devrá ter o formato A4
    - →Deverá estar escrita à mão, e não fotocopiada
    - →Na primeira repetição escrita deverá estar escrita apenas de um lado (na 2ª repetição e exames pode estar dos 2 lados)
- **Provas práticas**
  - Trabalhos práticos de laboratório
  - Trabalhos de casa
  - Projecto Coeficiente 10

Bibliografia

- **Livro de texto**
  - **Sinais e Sistemas, Isabel Lourtie, Escolar Editora, 2002** (€25)
- **Livros de apoio**
  - **Signals and Systems, Simon Haykin, Barry Van Veen, Wiley, 2002** (€62)
  - **Analog and Digital Signal Processing, Ashok Ambardar, Brooks/Cole Publishing, 1999** (€66)
  - **Signals & Systems, Allan Oppenheim (2nd Ed.), Alan Willsky, Prentice-Hall, 1997** (€80)
  - **Sistemas Lineares, Isabel Ribeiro, IST Press, 2002** (€27)
  - **Curso de Matlab, Batel Anjo, Principia, 2003** (€10)
- **Site de apoio**
  - **www.isegi.unl.pt/docentes/vlobo**
- **Horário de dúvidas**
  - **2ª feira às 17:30, e sempre que combinado com o professor**

Dúvidas ?

- **Marcação das repetições escritas**
- **Porque é que esta cadeira é importante ?**
  - **Preparação para:**
    - →**Telecomunicações** (Fundamentos de Telecom.; Antenas e propagação; Sistemas de Telecomunicações)
    - →**Radares** (Radares e radio-ajudas)
    - →**Controlo** (automação e controlo)
    - →**Electrotecnia e Electrónica** (Electrotecnia, Fundamentos de Electrónica, Electrónica I e II, etc)
    - →**Vida de um Oficial da Armada**
  - **Puro prazer de compreender o mundo !!!**
  - **Exemplos de aplicação.....** (nunca mais acabam...)
- **Vamos a isto !**

Capítulo 1

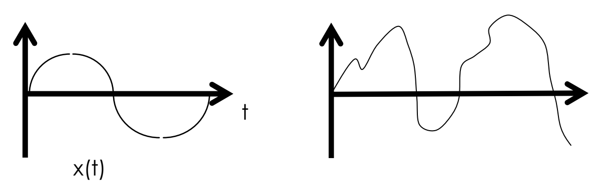
Introdução a Sinais e Sistesmas

Bibliografia

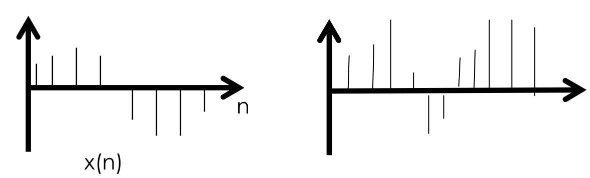
(Cap.1 Louretie)(Cap.1 Haykin)(Cap.1 Ribeiro)

Análise de Sinais

- **O que é um sinal ?**
  - **Uma sequência de valores**
    - →**Sinal contínuo**



    - →**Sinal discreto**



    - →**Exemplos**

      Sons, ecos de radar, sinais eléctricos, movimentos mecânicos, imagens,..

Sinais e sistemas

- **Sistema**
  - Recebe um sinal, processa-o, e produz outro sinal "à saída"

Sinal de entrada → Sistema → Sinal de saída

Sinal de antena → rádio → sinal para altifalantes

Ondulação → navio → balanço de navio

Sinal de controlo eléctrico → motor → binário

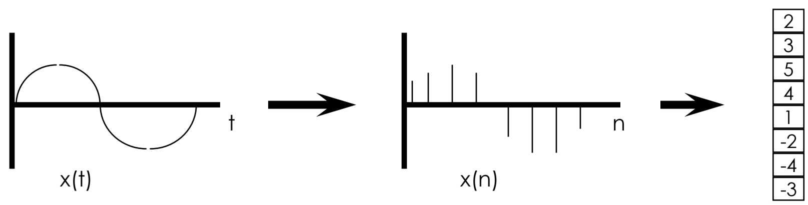
Sinal para altifalantes → caixa "de psicadélicas" → lâmpadas

Sinais discretos e contínuos

- **Sinais contínuos**
  - Ocorrem frequentemente "na natureza"
  - São representados por *funções contínuas*
  - É difícil manipulá-las em computadores (têm que ser maipulados analiticamente)
  - Para trabalhar com este tipo de tipo de sinais é mais fácil subsituí-lo por AMOSTRAS digitais, feitas com uma regularidade "suficientemente alta"
- **Sinais discretos**
  - Sinais discretos "por natureza"
    - →população, modelos económicos, etc
  - Sinais contínuos discretizados
    - →Facilidade de manipulação
  - Podem ser representados por funções ou por *vectores ou matrizes*
  - Processamento digital de sinais (DSP – Digital Signal Processing) é actualmente uma área importante de engenharia

Representação de sinais discretos

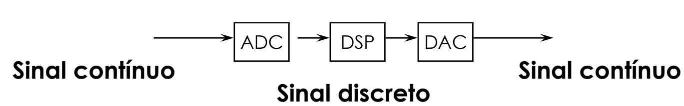
- **Sinais Discretos no tempo**
  - **O tempo varia em "saltos" de uma unidade**



- **Sinais Discretos em Amplitude**
  - **Os sinais digitais são não só discretos no tempo, como discretos nos valores que podem tomar (erro de quantização). Vamos por enquanto ignorar este efeito**
- **São séries de valores**
  - **Podemos guardar em MATRIZES e manipular no computador**
  - **x(0) = 0, x(1) = 10, x(2) = 18, x(3) = 23, 19, 11, 1, -9, -17, -22, ...**

Implementação de sistemas discretos

- **Facilidade de implementação**
  - **Sistemas dedicados simples com 1 μP, 1 ROM , 1 RAM, 1 ADC, 1 DAC**
  - **Computadores de uso geral**
- **Facilidade em mudar as características**
  - **Sistemas facilmente reprogramáveis**
  - **Filtros adoptivos**
- **Facilidade em simular/implementar no computador**
  - **Processamento resume-se a manipular matrizes, que pode ser feito até com folhas de cálculo**
  - **Programas dedicados: MatLab, Dadisp, etc.**



Vantagens de DSP

- **Robustez e fiabilidade**
  - imunidade ao ruído
  - ausência de parâmetros aleatórios ou de difícil controlo
- **Possibilidade de características impossíveis em contínuo**
  - Filtros "ideais"
  - Sistemas que seguem exactamente a referência
- **Facilidade em construir circuitos integrados dedicados**
  - A partir de um "core" standard é fácil adicionar outros módulos
- **Potência de cálculo cada vez maior em sistemas digitais**

Sinais e transformações de variável

- **Definição de sinais:**
  - São funções de uma ou mais variáveis independentes que contêm informação sobre o comportamento e características de determinados fenómenos.
  - Essas funções têm:
    - →Um domínio, ou variável independente (tempo,espaço,etc)
    - →Um contradomínio, ou grandeza que está a ser observada
    - →Exemplos
      - y=f(x), i=f(v), etc
- **Transformações lineares da variável independente**
  - y=f(x) para y=f(ax+b) a,b $\in \Re$

Sinais e transformações de variável

- **Mudança de escala (b=0, a>0)**
  - y=f(ax)
  - Gráfico de:
    - →a>1 (contração do sinal)
    - →a<1 (expansão do sinal)
- **Reflexão em relação à origem**
  - y=f(-x) (a=-1)
  - Gráfico:
- **Translação**
  - y=f(x+b)
  - Gráfico de:
    - →b>0 (avanço no tempo)
    - →b<0 (atraso no tempo)
- **Composição de transformações**

Propriedades

- **Paridade de um sinal**
  - Sinal Par: f(x)=f(-x)
  - Sinal Ímpar: f(x)=-f(-x)
  - Gráficos:
  - Características interessantes:
    - →QUALQUER sinal pode ser decomposto na soma de uma componente par e uma componente ímpar
    - →$f(x)=f_p(x)+f_i(x)$ onde

      $f_i(x) = ½*[f(x)-f(-x)]$ (parte ímpar)

      $f_p(x) = ½*[f(x)+f(-x)]$ (parte par)

      Prova:...

Propriedades

- **Periodicidade**
  - Sinal periódico:
    - $\rightarrow$f(x)=f(x+T) $\forall$x
    - $\rightarrow$T (ou T_0) é o período
  - Características interessantes:
    - $\rightarrow$Um sinal períodico é necessáriamente infinito
      - Sinal período durrante um dado intervalo de tempo
    - $\rightarrow$Se tem perído T, tem tembém período nT
      - T_0 é o período mínimo que satisfaz a condição, ou período fundamental
    - $\rightarrow$Um sinal constante tem período fundamental 0...

Exercícios

- **Separar o sinal S1 nas suas componentes pares e ímpares**
- **Verificar se o sinal S2 é periódico ao longo da sua duração**
- **Classificar quanto a paridade e periodicidade os seguintes sinais contínuos**
  - y=sin(x)
  - y=cos(x)
  - y=exp(x
  - y=abs(x)
  - $y=x^2$
- **Antes de continuar a ver propriedades vamos dar uma espeitadela nos sinais "base" mais importantes**

Sinais mais importantes

- **Escalão unitário**
  - Função de heaviside u(t)
  - Inversão e deslocamento
  - Função sinal
  - Função rectangulo ("função quadrada")
  - Casos discretos
  - Multiplicação por um escalão
- **Função impulso unitário (ou função delta)**
  - Caso discreto
  - Caso contínuo
    - → Derivada de u(t), integral=1, $\forall t \neq 0$, f=0
    - → Também chamado delta de Dirac
  - Multiplicação por um impulso

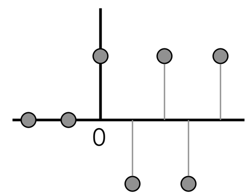
Sinais importantes

- **Rampas**
- **Exponenciais**
- **Senos**
- **Exponenciais complexas**
- **SLITS**
  - Conceito
  - Convolução

Sinais mais importantes

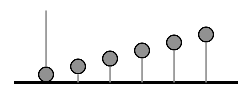
- **Escalão unitário alterno (só caso discteto**

$$x(n) = \begin{cases} (-1)^2 \Leftarrow n \geq k \\ 0 \Leftarrow n < k \end{cases}$$

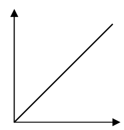


- **Rampa unitária**

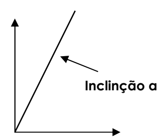
$$x(n) = \begin{cases} 0 \Leftarrow n \leq 0 \\ K \Leftarrow n > 0 \end{cases}$$



$$x(t) = \begin{cases} 0 \Leftarrow t < 0 \\ t \Leftarrow t > 0 \end{cases}$$



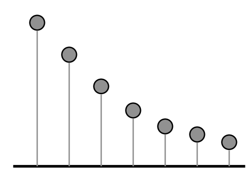
$$x(t) = \begin{cases} 0 \Leftarrow t < 0 \\ at \Leftarrow t > 0 \end{cases}$$



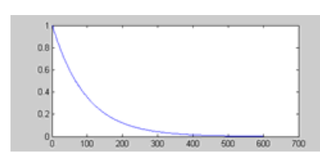
Sinais mais importantes

- **Exponencial decrescente**

$$x(n) = a^n u(n)$$



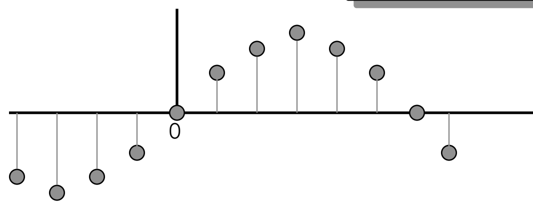
$$x(t) = \begin{cases} 0 \Leftarrow t < 0 \\ a^t \Leftarrow t > 0 \end{cases}$$



a > 1 diverge
a=1 constante
a<1 constante

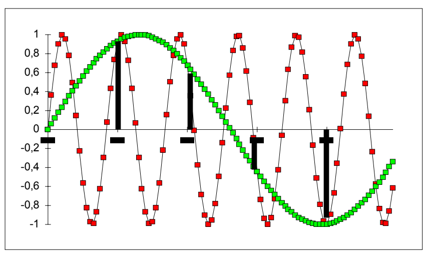
Sinais mais importantes

- **Sinusioides**
  - **Caso contínuo**
    - **→sin(ω t)**
      f=ω/2π
  - **Caso discreto**
    - **→sin(ω n)**



MUITO IMPORTANTE ! IMPORTANTÍSSIMO !

sin(ω n) = sin(ω n + 2π) As sinusóides discretas só são diferentes para 0 < ω < 2π (ou qq intervalo de largura 2π)



seja $\omega' = \omega + 2\pi$

$\sin(\omega' n) = \sin((\omega+2\pi)n)$

$= \sin(\omega n + 2\pi n)$

$= \sin(\omega n)$

Q.E.D

Sinais mais importantes

- **Exponencial complexa**
  - **Junta o comporamento do seno com a exponencial:**

$$x(t) = Ce^{at} \qquad C = Ae^{j\phi}$$

$$a = r + j\omega$$

$$\mathrm{Re}(x(t)) = Ae^{at}\cos(\omega t + \phi)$$

Capítulo 2

Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo - SLITS

Bibliografia

(Cap.2 Louretie)(Cap.2 Haykin)(Cap.1,2 Ribeiro)

Sistemas

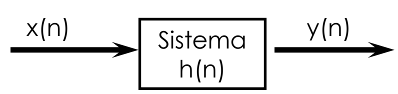
- **Conceito**
  - Diccionário: Um sistema é uma combinação de elementos que actuam em conjunto a fim de atingir um dado objectivo
  - Algo que transforma um sinal noutro, e é tido como um bloco ou "caixa preta"
  - Fronteiras de um sistema: depende que quem o vê e para quê
- **Diagramas de blocos**
  - Cada bloco é uma caixa negra, caracterizada por um "comportamento global"
    - →Um sistema pode eventualmente ser "partido" em sub-sistemas
    - →Um sistema pode ser agregado com outros para formar um sistema de "mais alto nível"
    - →Blocos/ramos/pontos de derivação/pontos de soma
- **Exemplos de sistemas descritos por diagramas de blocos**

Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo- SLIT

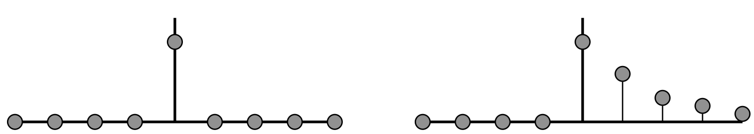
- **Definições**
  - **Linear**
    - →**Se o sistema tem a resposta Y_1 para uma entrada X_1, e a resposta Y_2 para uma entrada X_2 então, se tiver uma entrada $X_3=X_1+X_2$ terá uma resposta $Y_3=Y_1+Y_2$**
    - →$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$
  - **Invariante no tempo**
    - →**"Reage sempre da mesma maneira"**
    - →**A reacção não depende da altura no tempo em que a excitação ocorre**

SLIT - Sist.Linear e Invariante no Tempo

- **SLIT - Sistema linear invariante ao tempo**



- **RESPOSTA IMPULSIVA**
  - **Resposta ao impulso unitário**
  - **Designa-se por h(n)**



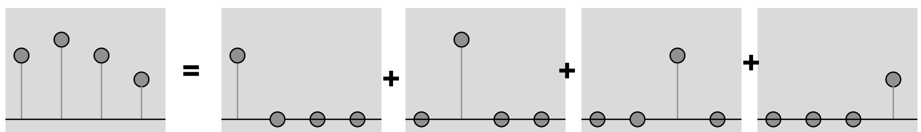
Entrada d(n) Saída h(n)

E quando a entrada não é um impulso ? h(n) servirá para alguma coisa ?

SLIT - Sist.Linear e Invariante no Tempo

Análise de Sinais

- **Qualquer sinal pode ser considerado como a sobreposição de vários *delta de dirac*, com amplitudese tempos diferentes:**



- **Se o sistema é linear e invariante no tempo, a saída pode ser calculada somando as respostas impulsivas a cada um desses sinais**
  - **Obtemos assim a CONVOLUÇÃO dos dois sinais**

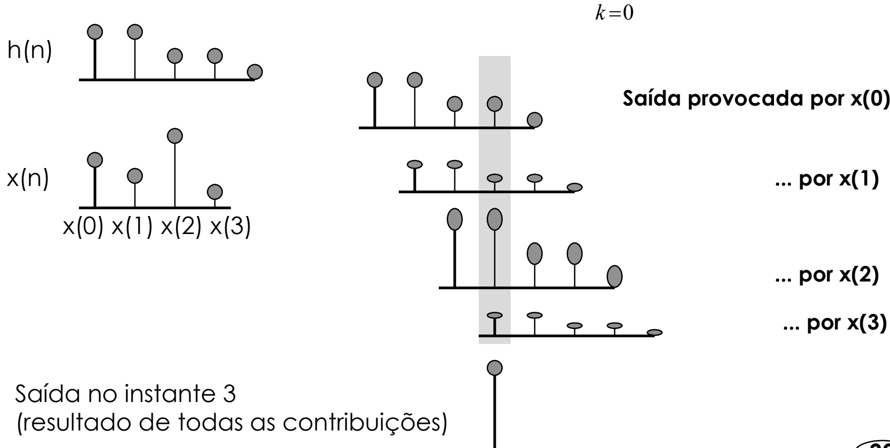
29

INTERPRETAÇÃO DO SIGNIFICADO DA CONVOLUÇÃO

Análise de Sinais

- **Para um sistema causal e limitado no tempo, a resposta é simplesmente:**

$$y(n) = \sum_{k=0}^{k=N} h(k)x(n-k)$$



30

Resposta de um SLIT

- **A resposta de um slit é a convolução da entrada com a resposta impulsiva:**

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k)h(n-k)$$

  - **Nota:** Por vezes chama-se h(n,k) em vez de h(n-k), para realçar que se trata da resposta no instante *n* provocada pela entrada do momento *k*

- **Expandindo para um caso concreto (por ex. n=1)**

  →**y(1)=** …+ x(-2)h(3) + x(-1)h(2) + x(0) h(1) **+ x(1)h(0)** + x(2) h(-1) +….

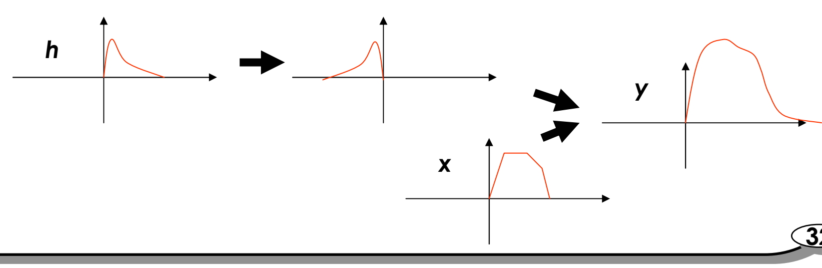
- **Notação para CONVOLUÇÃO: ***
  - **X(n)*Y(n)**

INTERPRETAÇÃO DO SIGNIFICADO DA CONVOLUÇÃO

- **Reordenação dos termos da soma**

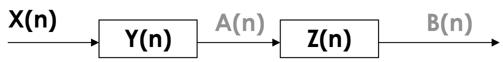
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k)h(n-k)$$

- **Outra interpretação gráfica**
  - **Inverter a resposta impulsiva**
  - **"Passá-lo" pelo sinal de entrada**



Propriedades da convolução

- **Associatividade**
  - X(n)*Y(n)*Z(n) = (X(n)*Y(n)) *Z(n) = X(n)* (Y(n)*Z(n))



- **Comutatividade**
  - X(n)*Y(n) = Y(n)*X(n)
- **Distributividade**
  - X(n)*(Y(n)+Z(n)) = X(n)*Y(n) + X(n)*Z(n)

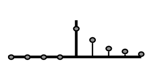
PROPRIEDADES DE SISTEMAS

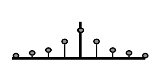
- **MEMÓRIA**
  - Diz-se que um sistema tem memória se a saída depende de entradas anteriores (ou posteriores)
  - Para que um sistema não tenha memória a resposta tem que ser da forma ?
    - →Uma mera multiplicação por uma constante


Sem memória


Com memória

- **CAUSALIDADE**
  - Diz-se que um sistema é causal quando a sua saída não depende da entrada em instantes futuros
  - Há muitos sistemas não causais
    - →Exemplos em processamento de imagem
  - A resposta impulsiva de um sistema causal é 0 para n<0


Causal


Não causal

PROPRIEDADES DE SISTEMAS

- **INVERTIBILIDADE**
  - **Diz-se que um sistema é invertível quando há um sistema (dito inverso) que o anula, de modo que o sinal não é alterado quando passa por esses dois sinais**

x(n) → [h(n)] → y(n) → [h'(n)] → z(n)=x(n)

y(n)=x(n)*h(n)

z(n)=y(n)*h'(n) = x(n)*h(n)*h'(n) ⇒ h(n)*h'(n)= d(n)

Exemplo de um sistema invertível: um integrador

Integrador → h(n)=u(n)
Diferenciador → h'(n)=d(n)-d(n-1)

h(n)*h' (n)=u(n)*(d(n)-d(n-1)
=u(n)*d(n)-u(n)*d(n-1)
=u(n)-u(n-1)
=d(n)

PROPRIEDADES DE SISTEMAS

- **ESTABILIDADE**
  - **Há vários critérios de estabilidade diferentes.**
  - **Vamos considerar um sistema estável se só se e apresentar uma *<u>SAÍDA LIMITADA PARA UMA ENTRADA LIMITADA</u>***
    - →**Uma sequência diz-se limitada se |x(k)|<M $\forall_k$**
    - →**Exemplo:**

u(n)	**é limitada**	**(numca é maior que 1)**
x (n) = n	**não é limitada**	**(tende para infinito)**

  - **Para que um sistema seja estável é necessário que a sua resposta impulsiva seja absolutamente somável**

$$
\begin{aligned}
|y(n)|=|x(n)*h(n)|&= |\ \Sigma\ x(k)h(n-k)\ | \\
&\le \Sigma|x(k)|\,|h(n-k)| \quad \text{mas } |x(k)|<M \\
&\le \Sigma\ M\ |h(n-k)| \\
&= M\ \Sigma|\ h(n-k)| \quad \text{se } \Sigma|\ h(n-k)|\text{, e fôr N…} \\
&\le M\text{x}N
\end{aligned}
$$

Um integrador é um sistema estável ? E o integrador com perdas apresentado no acetato 6 ? E o diferenciador do acetato anterior ?

PROPRIEDADES DE SINAIS

- **ENERGIA**
  - **Define-se energia de um sinal como sendo:**

$$Energia = W = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} \left| x(k) \right|^2$$

  - **Para sinais periódicos, é mais conviniente usar a energia média, ou potência(dado que a energia total é infinita):**

$$Energia\,media = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} \left| x(k) \right|^2$$ onde N=periodo

  - **Ou generalizando para qualquer sinal:**

$$Potencia = P = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \sum_{t=-k/2}^{t=+k/2} \left| x(t) \right|^2$$

Convolução em sistemas contínuos

- **Em sistemas contínuos, basta substituir impulsos por deltas de Dirac, e somatórios por integrais…**

Descrição de sistemas através de EQUAÇÕES ÀS DIFERENÇAS

- **Muitos sistemas são descritos através de equações**
  - **Forma geral:** $a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{d\ y}{dt} + y = b_0 x + b_1 \frac{d\ x}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m x}{dt^m}$

$x \longrightarrow \boxed{\text{sistema}} \longrightarrow y$

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{M} b_i \frac{d^i x}{dt^i}$$

Equação homogénea   Termo forçado

O que é uma derivada de um sinal discreto ?

  - **Em sistemas discretos usam-se diferencas finitas em vez de derivadas**

N = Ordem do sistema

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-k)$$

Equações às diferenças

- **Por uma questão de normalização, considere-se a_0=0, e re-escreve-se a equação como:**

$$y(n) = -\sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i) + \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-k)$$

Derivadas da saída   Derivadas da entrada

- **Termos derivados da saída**
  - **Forma uma equação RECURSIVA**
  - **Dão origem a uma resposta impulsiva INFINITA**
  - **Dão origem aos filtros IIR (Infinite Impulse Response)**
- **Termos derivados das entradas**
  - **Formam uma equação NÃO RECURSIVA**
  - **Dão origem a uma resposta impulsiva FINITA**
  - **Dão origem aos filtros FIR (Finite Impulse Response)**

Equações às diferenças - Parte homogénea

- A dinâmica de muitos sistemas contínuos pode ser descrita através de equações diferenciais homogéneas

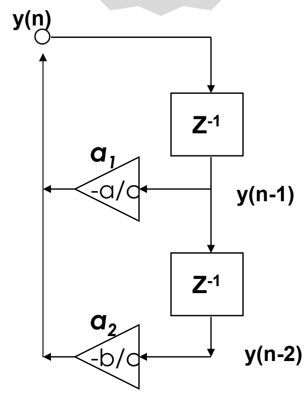
  ay''+by'+cy=0

- De modo análogo, a correspondente representação por equações às difrenças será

  ay(n-2)+by(n-1)+cy(n)=0

- A implementação a partir das equações às diferenças é imediata

Resposta impulsiva infinita - IIR



ay(n-2)+by(n-1)+cy(n)=0

$\Rightarrow$ y(n) = -a/c y(n-2) -b/c y(n-1) =0

Equações às diferenças - Parte forçada

- O sinal de entrada atrasado pode ser obtido com um tap-delay, implementado como um conjunto de flip-flops (um registo de deslocamento) ou simulado com uma matriz

- Exercício:
  - Simular em Excel, e depois em Matlab, o sistema caracterizado por

Resposta impulsiva finita - FIR

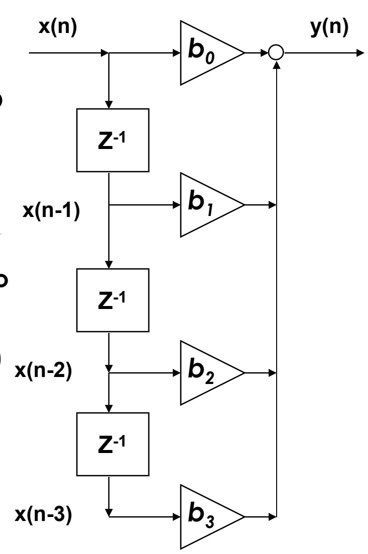
a) y(n)=1/3 x(n)+1/3 x(n-1)+1/3 x(n-2)

b) y(n)= 0.5 x(n) + 0.5 y(n-1)

quando recebe as seguintes entradas

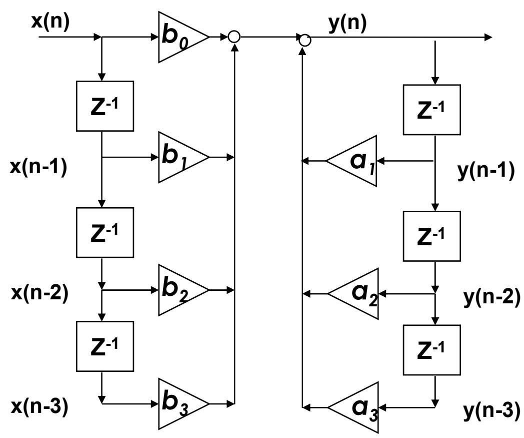
x(n) = d(n) x(n) = u(n)

x(n) = n x(n) = sin(0,1×n)



Equações às diferenças

- **Estrutura de um filtro genérico**
- **FIR**
  - Finite Impulse Response
  - Tem atrasos da entrada
- **IIR**
  - Infinite Impulse Response
  - Tem atrasos da saída



Capítulo 3

Transformadas de Fourier e Fourier Discreta

Bibliografia

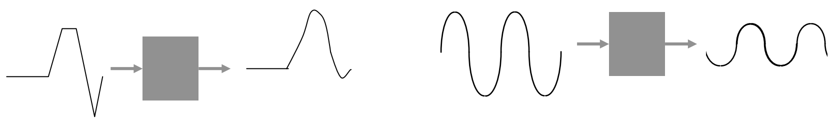
(Cap.3,4 Louretie)(Cap.3,6 Haykin)(Cap.3 Ribeiro)

Domínio da frequência

- **Qualquer sinal (1) pode ser decomposto numa soma de exponenciais complexas**
  - **Uma exponencial complexa é a soma de um seno com um coseno**

$$e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j\sin(\omega n)$$

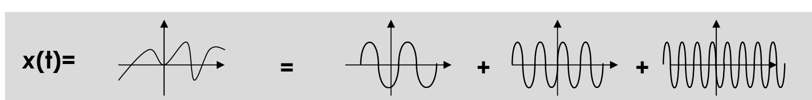
- **A decomposição em senos e cosenos é muito útil pois são são funções próprias de SLITS: a *forma* de onda de saída é idêntica à da entrada, diferindo apenas a *amplitude e fase***



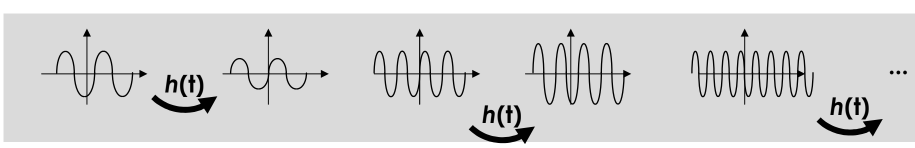
  - **Facilidade de caracterização: bastam dois parâmetros**

Motivação para a transformada de Forier

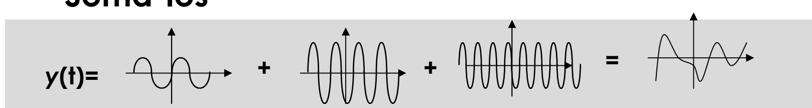
- **Para calcular a resposta de um SLIT a um sinal**
  - **Partir o sinal em vários sinais sinusoidais**



  - **Calcular o modo como o SLIT responde a cada um deles**

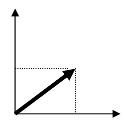


  - **Somá-los**



Motivação para a transformada de Forier

- **Como partir um sinal em sinusoides ?**
  - **Ver quão semelhante é o sinal a cada seno**
  - **Fazer a projecção do sinal sobre "eixos de sinusoides"**



  - **Produto interno de vectores -> produto interno de sinais**

Definição da transformada de Fourier

- **Definição:**

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{-j\omega n} d\omega$$

Frequências discretas variam entre -π e π

sinais contínuos

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

Comentários sobre a Transf. de Fourier

- **Domínio do tempo vs Domínio da frequência**
  - Corresponde a olhar para a mesma coisa segundo ângulos diferentes
  - Podemos passar de um domínio para o outro sem perder informação
  - A representação no domínio da frequência chama-se ESPECTRO DE FREQUÊNCIA

Domínio do tempo

$$x(t) \longrightarrow h(t) \longrightarrow y(t)$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

Transformada de Fourier

$$X(\omega) \longrightarrow H(\omega) \longrightarrow Y(\omega)$$

Domínio da frequência

Existência da transformada

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

- **Os somatórios/integrais podem divergir**
  - A transformada não existe nesses casos (ou é infinita...)
- **Condições SUFICIENTES**
  - Condiçoes de Dirichelet:
    - →x(t) é absolutamente somável/integrável
    - →No caso contínuo, x(t) tem que ter um número finito de máximos/mínimos, e um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo finito
      - (sempre verificado no caso discreto)
- **Outros casos**
  - Usando funções de Dirac é possível calcular a transformada de muitos mais sinais (senos/cosenos,escalões, funções contínuas

Comentários sobre a Transf. de Fourier

- **Grande simplificação:**
  - **Transforma convoluções em multiplicações**
  - **Convolução de sinais no tempo =**
    Multiplicação das suas transformadas no tempo !

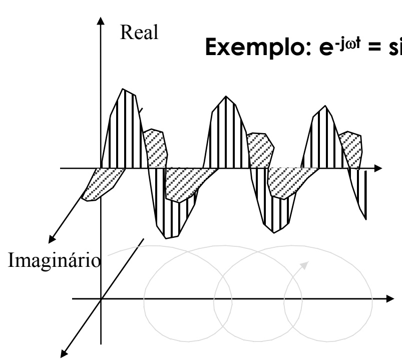
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(t)h(t-\tau) \Leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega)H(\omega)$$

  - **O cálculo da resposta de um SLIT a uma dado sinal de entrada torna-se muito fácil se formos capazes de passar de/para o domínio da frequência**

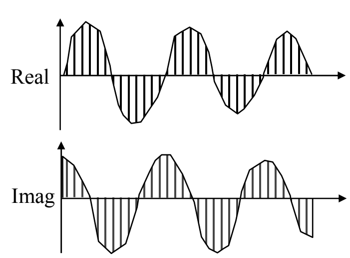
Comentários sobre a Transf. de Fourier

- **Grande complicacação:**
  - **A transformada de um sinal real é um sinal complexo**
  - **Cada ponto no espectro é caracterizado por uma magnitude uma fase (ou parte real/parte imaginária)**

Exemplo: $e^{-j\omega t}$ = sin(ωt)+j×sin(ωt) = sinusoide complexa



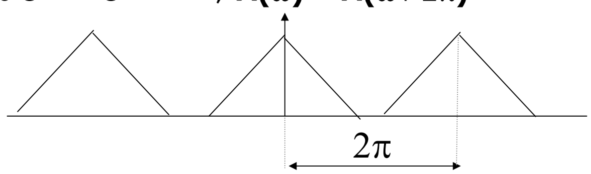
Visão tri-dimensional



Visão catesiana

Transf. de Fourier de sinais discretos

- **Ideia base:**
  - Ver quão semelhante é o sinal em causa com cada uma das sinusóides
  - Medida de similitude: produto interno
    - →A componente de frequência x é o produto interno (ponto a ponto), entre o sinal e o seno dessa frequência !
- **A transformada de um sinal discreto é uma função contínua !**
  - Não dá jeito nenhum… vamos ter que a calcular num conjunto finito de pontos
- **O espectro de um sinal discreto é periódico !**
  - Como $e^{-j\omega n} = e^{-j(\omega+2\pi)n}$, $X(\omega) = X(\omega + 2\pi)$



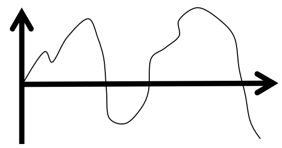
Ponto da situação com MATLAB

- **Exercício:**
  - Rotina para calcular a convolução entre 2 sinais
    - →Poderemos calcular a saída de um SLIT quando excitado com um sinal qualquer
  - Rotina para calcular a transformada de Fourier num dado ponto (frequência)
    - →Poderemos calcular o espectro de um sinal num conjunto arbitrário de pontos
    - →Poderemos calcular a saída de um SLIT quando excitado com um sinal qualquer

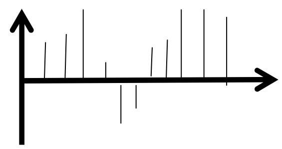
Amostragem

Análise de Sinais

- **Questões:**
  - Com que periodicidade devo amostrar sinais contínuos quando estou a convertê-los em digitais ?
  - Qual a relação entre a frequência “real” do sinal, e a “frequência digital” ?
  - Qual a relação entre “*n*” e “*t*”
- **Conceito de período/frequência de amostragem**
  - Intervalo entre 2 amostras = T_s (T_{Sample})
  - $1/T_s$ = f_s=Frequência de amostragem



$x_c(t)$



$x_d(n)= x_c(nT_s)$

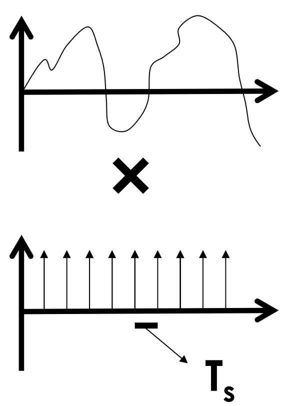
V.Lobo © EN

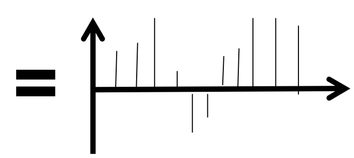
55

Amostragem

Análise de Sinais

- Se multiplicar o sinal analógico por um “pente de Diracs”, obtenho o digital !





Multiplicalção no tempo =
convolução na frequência

V.Lobo © EN

56

Frequência em contínuo e em digital

Análise de Sinais

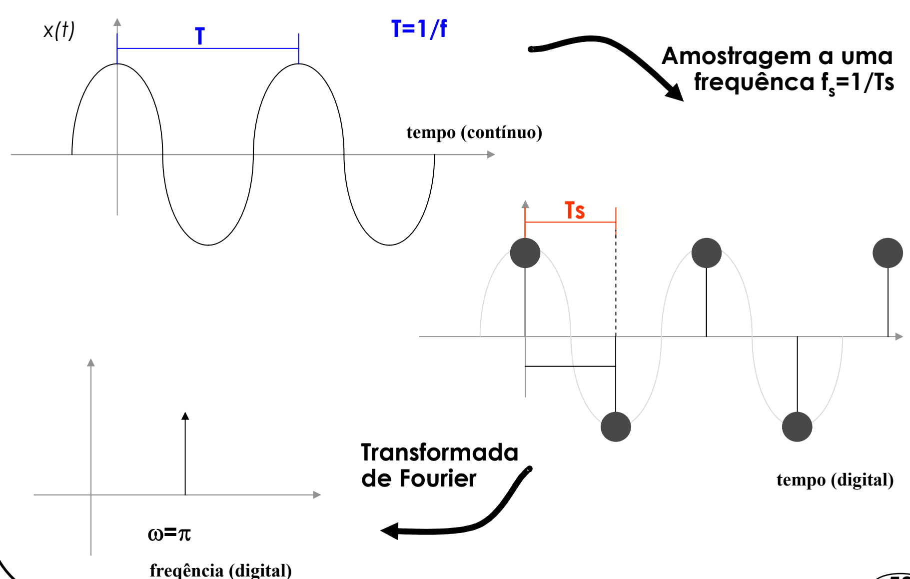
- Qual a relação entre frequência de um sinal contínuo e desse mesmo sinal amostrado ?
  - –EXPLICAÇÂO INTUITIVA
    - →Sabemos que 2 frequências que diferem em 2π serão rigorosamente idênticas quando amostradas.
    - →Sabemos que de $\omega=\pi$ a 2π a "taxa de variação" diminui
    - →Sabemos que $\omega=\pi$ corresponde à maior frequência digital possível
    - →Sabemos que no domínio do tempo, o sinal digital de maior frequência é aquele em que duas amostras consecutivas têm sempre sinal contrário e a mesma amplitude (pente alternado)
    - →Sabemos que o pente alternado tem uma frequência de $1/(2^*Ts)=f_s/2$, e quem um sinal digital de frêquência π é um pente alternado !
    - →Logo, um sinal contínuo de frequência $f_s/2$, quando amostrado com uma frequência f_s, tem uma frequência digital π.

V.Lobo © EN

57

E agora os bonecos…

Análise de Sinais



V.Lobo © EN

58

Para quem esteve a dormir…

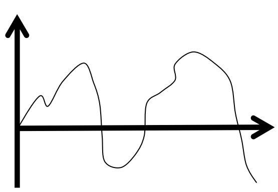
- Regra de 3 simples…

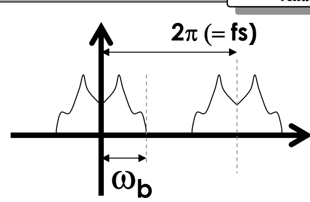
$$f_{contínuo} = fs/2 \leftrightarrow f_{digital} = \pi = 3.1416\ldots$$

$$\frac{fs/2}{f_{contínuo}} = \frac{\pi}{f_{digital}}$$

- Para os que ainda mais "distraídos":
  - $f_{digital} = f_{contínua} \times 2\pi/fs$
  - $f_{contínua} = f_{digital} \times fs/2\pi$

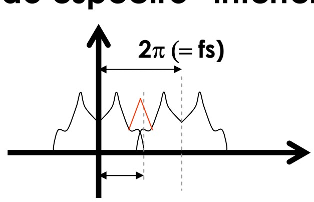
Consequências da amostragem





- Se o sinal original fôr limitado em frequência, tendo uma largura de banda de ω_b, é possível obter o seu espectro sem erros.

- Se se diminuir a frequência de amostragem, há o risco do espectro "interferir com si próprio"

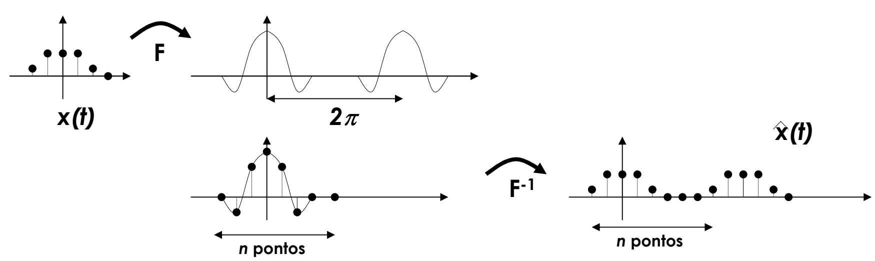


Teorema da Amostragem

- Só é possível amostrar um sinal sem perder nenhuma das suas características se ele for limitado em frequência
- Para não perder nenhuma característica (e ser possível reconstruir o sinal sem erro) é necessário amostrá-lo com uma
  - frequência de amostragem pelo menos 2 vezes superior à sua largura de banda
- $2 \times \omega_b$ = frequência de Nyquist
- Frequência de amostragem mais baixa:
  - Altas frequências interferem nas baixas
  - Haverá "ALIASING" no domínio do tempo

Amostragem em frequência

- Amostrar lentamente no tempo – aliasing na frequência
- Amostrar lentamente na frequência – aliasing no tempo



- Amostragem de modo a não perder informação:
  - USAR TANTOS PONTOS NA FREQUÊNCIA COMO NO TEMPO

Mais comentários...

Análise de Sinais

- **Aumentar a frequência de amostragem:**
  - Aumenta a largura de banda que podemos amostrar sem erros
  - A frequência digital corresponde a frequências cada vez maiores
- **Aumentar o número de pontos amostrados no tempo:**
  - Aumenta a resolução em frequência
  - Quanto mais tempo tenho para amostrar, melhor distingo frequências próximas

V.Lobo © EN

63

Propriedades da Transformada de Fourier

Análise de Sinais

- **Dado** $F(x(t)) = X(\omega)$
- **Linearidade**

$$x(t) = ay(t) + bz(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = aY(\omega) + bZ(\omega)$$

- **Deslocamento no tempo**

$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{j\omega t_0} X(j\omega)$$

- **Simetria do conjugado**

$$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-\omega)$$

  - Mas se x(t) for real, x*(t)=x(t) logo X(ω)=X*(-ω)
  - Se X(ω)=X*(-ω) então
    - → PARA SINAIS REAIS, o espectro de potência é um sinal PAR

V.Lobo © EN

64

Propriedades da Transformada de Fourier

- **Diferenciação**

$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(\omega)$$

- **Integração**

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$

- **Multiplicação (modulação)**

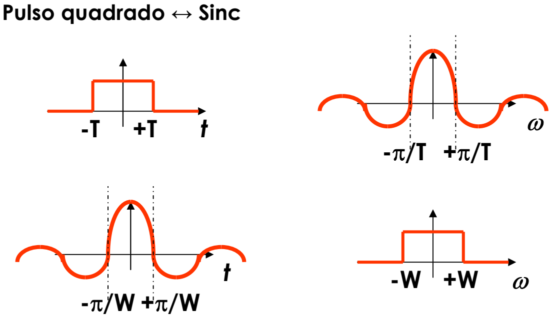
$$r(t) = s(t)p(t) \xleftrightarrow{F} R(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(S(\omega) * P(\omega)\right)$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- **Relação de Parseval (Conservação da energia)**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 d\omega$$

- **Pares notáveis de sinais/transformadas**
  - **Para não andar a fazer contas…consultar TABELAS!**
  - **Exemplo:**
    - $\rightarrow$ **Pulso quadrado $\leftrightarrow$ Sinc**



Transformada Inversa

- **Transformada Inversa**
  - **Recupera o sinal a partir da sua transformada**

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad \Longleftrightarrow \quad x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad \Longleftrightarrow \quad x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{-j\omega n} d\omega$$

Cálculo da transformada

- **Há uma série de simetrias que fazem com que os mesmos coeficientes sejam usados várias vezes**
  - **SIN(x)=COS(π/2-x)**
  - **Há várias técnicas, mas todas elas reduzem drasticamente o tempo de cálculo**
  - **FFT – Fast Fourier Transform**
    - **→A partir da definição → n^2**
    - **→Com FFT → n log(n)**
  - **Semelhança entre transformada directa e inversa**
    - **→As rotinas de FFT com pequenas alterações calculam também a transformada inversa**
- **Exercício em MATAB**
  - **Imagine que um dado radar transmite um sinal da seguinte forma: x(t)=4sin(4E9/2π * t)+sin(2.3E6//2π * t)**
  - **Calcule numericamente o espectro desse sinal (com 1024 pontos) usando directamente a definição de transformada e usando a rotina FFT do matlab. Calcule a diferença de tempo gasto em cada uma das opções**