

# Análise de Sinais

Dep. Armas e Electronica, Escola Naval  
V1.1 - Victor Lobo 2004

Análise de Sinais

## Capítulo 2

### Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo - SLITS

#### Bibliografia

(Cap.2 Louretie)(Cap.2 Haykin)(Cap.1,2 Ribeiro)

1

## Sistemas

Análise de Sinais

- **Conceito**
  - Dicionário: Um sistema é uma combinação de elementos que actuam em conjunto a fim de atingir um dado objectivo
  - Algo que transforma um sinal noutra, e é tido como um bloco ou "caixa preta"
  - Fronteiras de um sistema: depende que quem o vê e para quê
- **Diagramas de blocos**
  - Cada bloco é uma caixa negra, caracterizada por um "comportamento global"
    - Um sistema pode eventualmente ser "partido" em sub-sistemas
    - Um sistema pode ser agregado com outros para formar um sistema de "mais alto nível"
    - Blocos/ramos/pontos de derivação/pontos de soma
- **Exemplos de sistemas descritos por diagramas de blocos**

2

# Análise de Sinais

Dep. Armas e Electronica, Escola Naval  
V1.1 - Victor Lobo 2004

## Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo- SLIT

Análise de Sinais

### • Definições

#### - Linear

→ Se o sistema tem a resposta  $Y_1$  para uma entrada  $X_1$ , e a resposta  $Y_2$  para uma entrada  $X_2$  então, se tiver uma entrada  $X_3 = X_1 + X_2$  terá uma resposta  $Y_3 = Y_1 + Y_2$

→  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$

#### - Invariante no tempo

→ "Reage sempre da mesma maneira"

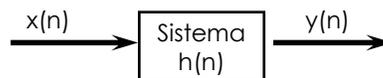
→ A reacção não depende da altura no tempo em que a excitação ocorre

3

## SLIT - Sist.Linear e Invariante no Tempo

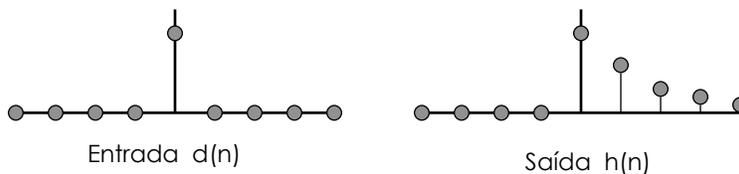
Análise de Sinais

### • SLIT - Sistema linear invariante ao tempo



### • RESPOSTA IMPULSIVA

- Resposta ao impulso unitário
- Designa-se por  $h(n)$



E quando a entrada não é um impulso ?  $h(n)$  servirá para alguma coisa ?

4

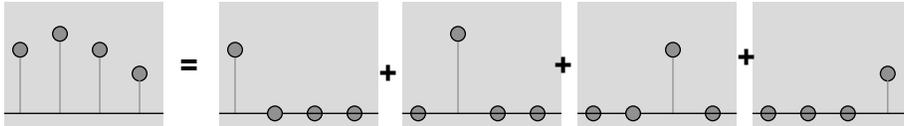
# Análise de Sinais

Dep. Armas e Electronica, Escola Naval  
V1.1 - Victor Lobo 2004

## SLIT - Sist.Linear e Invariante no Tempo

Análise de Sinais

- Qualquer sinal pode ser considerado como a sobreposição de vários *delta de dirac*, com amplitudes e tempos diferentes:



- Se o sistema é linear e invariante no tempo, a saída pode ser calculada somando as respostas impulsivas a cada um desses sinais
  - Obtemos assim a CONVOLUÇÃO dos dois sinais

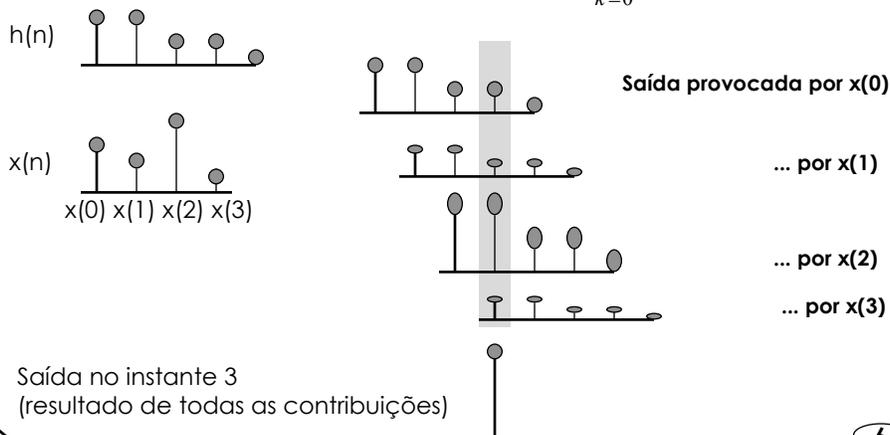
5

## INTERPRETAÇÃO DO SIGNIFICADO DA CONVOLUÇÃO

Análise de Sinais

- Para um sistema causal e limitado no tempo, a resposta é simplesmente:

$$y(n) = \sum_{k=0}^{k=N} h(k)x(n-k)$$



6

# Análise de Sinais

Dep. Armas e Electronica, Escola Naval  
V1.1 - Victor Lobo 2004

## Resposta de um SLIT

Análise de Sinais

- A resposta de um slit é a convolução da entrada com a resposta impulsiva:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k)h(n-k)$$

– **Nota:** Por vezes chama-se  $h(n,k)$  em vez de  $h(n-k)$ , para realçar que se trata da resposta no instante  $n$  provocada pela entrada do momento  $k$

- Expandindo para um caso concreto (por ex.  $n=1$ )

$$\rightarrow y(1) = \dots + x(-2)h(3) + x(-1)h(2) + x(0)h(1) + x(1)h(0) + x(2)h(-1) + \dots$$

- Notação para CONVOLUÇÃO: \*

–  $X(n)*Y(n)$

7

## INTERPRETAÇÃO DO SIGNIFICADO DA CONVOLUÇÃO

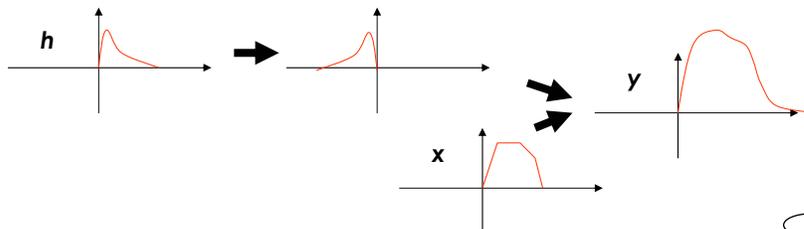
Análise de Sinais

- Reordenação dos termos da soma

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k)h(n-k)$$

- Outra interpretação gráfica

- Inverter a resposta impulsiva
- “Passá-lo” pelo sinal de entrada



8

# Análise de Sinais

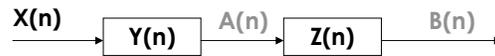
Dep. Armas e Electronica, Escola Naval  
V1.1 - Victor Lobo 2004

## Propriedades da convolução

Análise de Sinais

- **Associatividade**

-  $X(n)*Y(n)*Z(n) = (X(n)*Y(n)) *Z(n) = X(n)* (Y(n)*Z(n))$



- **Comutatividade**

-  $X(n)*Y(n) = Y(n)*X(n)$

- **Distributividade**

-  $X(n)*(Y(n)+Z(n)) = X(n)*Y(n) + X(n)*Z(n)$

9

## PROPRIEDADES DE SISTEMAS

Análise de Sinais

- **MEMÓRIA**

- Diz-se que um sistema tem memória se a saída depende de entradas anteriores (ou posteriores)
- Para que um sistema não tenha memória a resposta tem que ser da forma ?

→ Uma mera multiplicação por uma constante



Sem memória



Com memória

- **CAUSALIDADE**

- Diz-se que um sistema é causal quando a sua saída não depende da entrada em instantes futuros
- Há muitos sistemas não causais
- Exemplos em processamento de imagem
- A resposta impulsiva de um sistema causal é 0 para  $n < 0$



Causal



Não causal

10

# Análise de Sinais

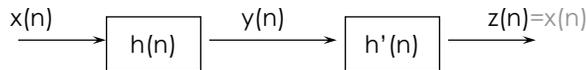
Dep. Armas e Electronica, Escola Naval  
V1.1 - Victor Lobo 2004

## PROPRIEDADES DE SISTEMAS

Análise de Sinais

### • INVERTIBILIDADE

- Diz-se que um sistema é invertível quando há um sistema (dito inverso) que o anula, de modo que o sinal não é alterado quando passa por esses dois sinais



$$y(n) = x(n) * h(n)$$

$$z(n) = y(n) * h'(n) = x(n) * h(n) * h'(n) \Rightarrow h(n) * h'(n) = d(n)$$

**Exemplo de um sistema invertível:** um integrador

Integrador  $\rightarrow h(n) = u(n)$

Diferenciador  $\rightarrow h'(n) = d(n) - d(n-1)$

$$\begin{aligned} h(n) * h'(n) &= u(n) * (d(n) - d(n-1)) \\ &= u(n) * d(n) - u(n) * d(n-1) \\ &= u(n) - u(n-1) \\ &= d(n) \end{aligned}$$

11

## PROPRIEDADES DE SISTEMAS

Análise de Sinais

### • ESTABILIDADE

- Há vários critérios de estabilidade diferentes.
- Vamos considerar um sistema estável se só se e apresentar uma **SAÍDA LIMITADA PARA UMA ENTRADA LIMITADA**

$\rightarrow$  Uma sequência diz-se limitada se  $|x(k)| < M \forall k$

$\rightarrow$  Exemplo:

$u(n)$	é limitada	(numca é maior que 1)
$x(n) = n$	não é limitada	(tende para infinito)

- Para que um sistema seja estável é necessário que a sua resposta impulsiva seja absolutamente somável

$$\begin{aligned} |y(n)| &= |x(n) * h(n)| = \left| \sum x(k)h(n-k) \right| \\ &\leq \sum |x(k)| |h(n-k)| \quad \text{mas } |x(k)| < M \\ &\leq M \sum |h(n-k)| \\ &= M \sum |h(n-k)| \quad \text{se } \sum |h(n-k)|, \text{ e } \forall n \dots \\ &\leq MxN \end{aligned}$$

Um integrador é um sistema estável? E o integrador com perdas apresentado no acetato 6? E o diferenciador do acetato anterior?

12

# Análise de Sinais

Dep. Armas e Electronica, Escola Naval  
V1.1 - Victor Lobo 2004

## PROPRIEDADES DE SINAIS

Análise de Sinais

### • ENERGIA

- Define-se energia de um sinal como sendo:

$$Energia = W = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |x(k)|^2$$

- Para sinais periódicos, é mais conveniente usar a energia média, ou potência (dado que a energia total é infinita):

$$Energia\ media = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{k=N-1} |x(k)|^2 \quad \text{onde } N = \text{período}$$

- Ou generalizando para qualquer sinal:

$$Potencia = P = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{t=-k/2}^{t=+k/2} |x(t)|^2$$

13

## Convolução em sistemas contínuos

Análise de Sinais

- Em sistemas contínuos, basta substituir impulsos por deltas de Dirac, e somatórios por integrais...

14

# Análise de Sinais

Dep. Armas e Electronica, Escola Naval  
V1.1 - Victor Lobo 2004

## Descrição de sistemas através de EQUAÇÕES ÀS DIFERENÇAS

Análise de Sinais

- Muitos sistemas são descritos através de equações

– Forma geral:  $a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \dots + a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{d y}{dt} + y = b_0 x + b_1 \frac{d x}{dt} + \dots + b_m \frac{d^m x}{dt^m}$

x → sistema → y

O que é  
uma derivada  
de um sinal  
discreto ?

$$\sum_{i=0}^N a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^M b_i \frac{d^i x}{dt^i}$$

Equação homogénea    Termo forçado

- Em sistemas discretos usam-se diferenças finitas em vez de derivadas

N = Ordem  
do sistema

$$\sum_{i=0}^N a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^M b_i x(n-k)$$

15

## Equações às diferenças

Análise de Sinais

- Por uma questão de normalização, considere-se  $a_0=0$ , e re-escreve-se a equação como:

$$y(n) = -\sum_{i=1}^N a_i y(n-i) + \sum_{i=0}^M b_i x(n-k)$$

Derivadas da saída    Derivadas da entrada

- Termos derivados da saída
  - Forma uma equação RECURSIVA
  - Dão origem a uma resposta impulsiva INFINITA
  - Dão origem aos filtros IIR ( Infinite Impulse Response)
- Termos derivados das entradas
  - Formam uma equação NÃO RECURSIVA
  - Dão origem a uma resposta impulsiva FINITA
  - Dão origem aos filtros FIR (Finite Impulse Response)

16

# Análise de Sinais

Dep. Armas e Electronica, Escola Naval  
V1.1 - Victor Lobo 2004

## Equações às diferenças - Parte homogénea

Análise de Sinais

- A dinâmica de muitos sistemas contínuos pode ser descrita através de equações diferenciais homogéneas

$$ay''+by'+cy=0$$

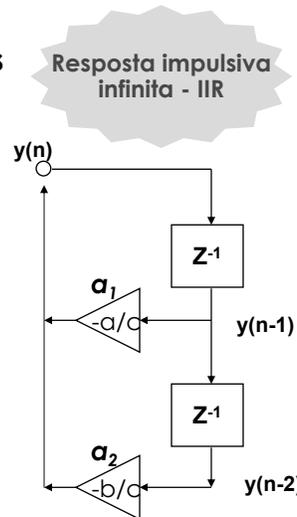
- De modo análogo, a correspondente representação por equações às diferenças será

$$ay(n-2)+by(n-1)+cy(n)=0$$

- A implementação a partir das equações às diferenças é imediata

$$ay(n-2)+by(n-1)+cy(n)=0$$

$$\Rightarrow y(n) = -a/c y(n-2) - b/c y(n-1) = 0$$



17

## Equações às diferenças - Parte forçada

Análise de Sinais

- O sinal de entrada atrasado pode ser obtido com um tap-delay, implementado como um conjunto de flip-flops (um registo de deslocamento) ou simulado com uma matriz

- Exercício:

- Simular em Excel, e depois em Matlab, o sistema caracterizado por

a)  $y(n)=1/3 x(n)+1/3 x(n-1)+1/3 x(n-2)$

b)  $y(n)= 0.5 x(n) + 0.5 y(n-1)$

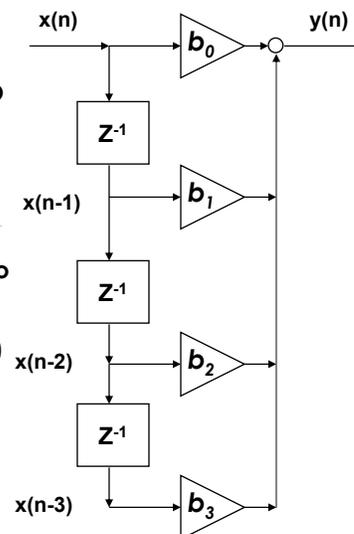
quando recebe as seguintes entradas

$x(n) = d(n)$

$x(n) = u(n)$

$x(n) = n$

$x(n) = \sin(0,1 \times n)$



18

# Análise de Sinais

Dep. Armas e Electronica, Escola Naval  
V1.1 - Victor Lobo 2004

## Equações às diferenças

Análise de Sinais

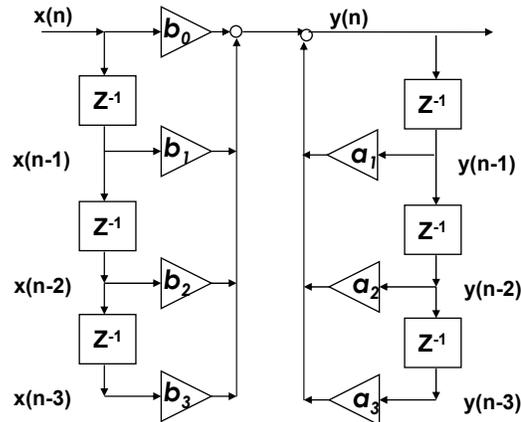
- Estrutura de um filtro genérico

- FIR

- Finite Impulse Response
- Tem atrasos da entrada

- IIR

- Infinite Impulse Response
- Tem atrasos da saída



19