Análise de Sinais

Dep. Armas e Electronica, Escola Naval

V1.1 - Victor Lobo 2004

Capítulo 2

Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo-SLITS

Bibliografia

(Cap.2 Louretie)(Cap.2 Haykin)(Cap.1,2 Ribeiro)

Sistemas

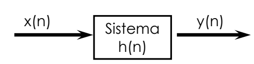
- **Conceito**
  - Diccionário: Um sistema é uma combinação de elementos que actuam em conjunto a fim de atingir um dado objectivo
  - Algo que transforma um sinal noutro, e é tido como um bloco ou "caixa preta"
  - Fronteiras de um sistema: depende que quem o vê e para quê
- **Diagramas de blocos**
  - Cada bloco é uma caixa negra, caracterizada por um "comportamento global"
    - →Um sistema pode eventualmente ser "partido" em sub-sistemas
    - →Um sistema pode ser agregado com outros para formar um sistema de "mais alto nível"
    - →Blocos/ramos/pontos de derivação/pontos de soma
- **Exemplos de sistemas descritos por diagramas de blocos**

Sistemas Lineares e Invariantes no Tempo SLIT

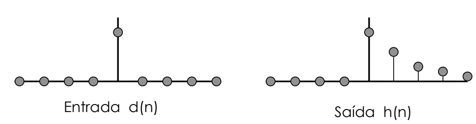
- **Definições**
  - Linear
    - →Se o sistema tem a resposta Y_1 para uma entrada X_1, e a resposta Y_2 para uma entrada X_2 então, se tiver uma entrada $X_3=X_1+X_2$ terá uma resposta $Y_3=Y_1+Y_2$
    - →$f(x_1+x_2)=f(x_1)+f(x_2)$
  - Invariante no tempo
    - →"Reage sempre da mesma maneira"
    - →A reacção não depende da altura no tempo em que a excitação ocorre

SLIT - Sist.Linear e Invariante no Tempo

- **SLIT - Sistema linear invariante ao tempo**



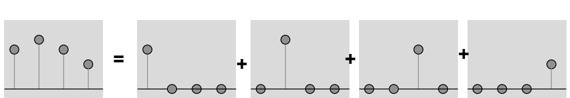
- **RESPOSTA IMPULSIVA**
  - Resposta ao impulso unitário
  - Designa-se por h(n)



E quando a entrada não é um impulso ? h(n) servirá para alguma coisa ?

SLIT - Sist.Linear e Invariante no Tempo

- **Qualquer sinal pode ser considerado como a sobreposição de vários *delta de dirac*, com amplitudese tempos diferentes:**

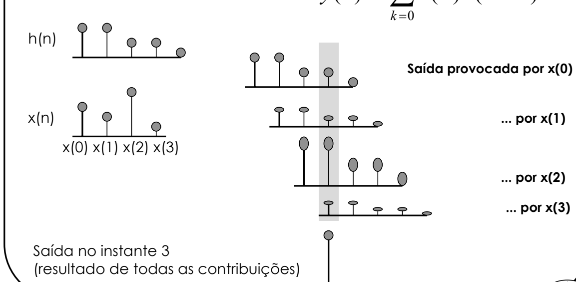


- **Se o sistema é linear e invariante no tempo, a saída pode ser calculada somando as respostas impulsivas a cada um desses sinais**
  - Obtemos assim a CONVOLUÇÃO dos dois sinais

INTERPRETAÇÃO DO SIGNIFICADO DA CONVOLUÇÃO

- **Para um sistema causal e limitado no tempo, a resposta é simplesmente:**

$$y(n)=\sum_{k=0}^{k=N} h(k)x(n-k)$$



Resposta de um SLIT

- A resposta de um slit é a convolução da entrada com a resposta impulsiva:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k)h(n-k)$$

  – **Nota:** Por vezes chama-se h(n,k) em vez de h(n-k), para realçar que se trata da resposta no instante *n* provocada pela entrada do momento *k*

- **Expandindo para um caso concreto (por ex. n=1)**
  →**y(1)=** …+ x(-2)h(3) + x(-1)h(2) + x(0) h(1) + **x(1)h(0)** + x(2) h(-1) +….

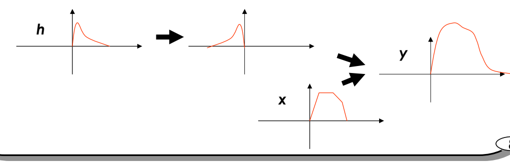
- **Notação para CONVOLUÇÃO: ***
  – **X(n)*Y(n)**

INTERPRETAÇÃO DO SIGNIFICADO DA CONVOLUÇÃO

- **Reordenação dos termos da soma**

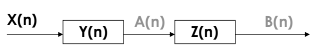
$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} h(k)x(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} x(k)h(n-k)$$

- **Outra interpretação gráfica**
  – **Inverter a resposta impulsiva**
  – **"Passá-lo" pelo sinal de entrada**



Propriedades da convolução

- **Associatividade**
  – **X(n)*Y(n)*Z(n) = (X(n)*Y(n)) *Z(n) = X(n)* (Y(n)*Z(n))**



- **Comutatividade**
  – **X(n)*Y(n) = Y(n)*X(n)**

- **Distributividade**
  – **X(n)*(Y(n)+Z(n)) = X(n)*Y(n) + X(n)*Z(n)**

PROPRIEDADES DE SISTEMAS

- **MEMÓRIA**
  – **Diz-se que um sistema tem memória se a saída depende de entradas anteriores (ou posteriores)**
  – **Para que um sistema não tenha memória a resposta tem que ser da forma ?**
    →**Uma mera multiplicação por uma constante**

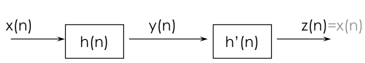
Sem memória   Com memória

- **CAUSALIDADE**
  – **Diz-se que um sistema é causal quando a sua saída não depende da entrada em instantes futuros**
  – **Há muitos sistemas não causais**
    →**Exemplos em processamento de imagem**
  – **A resposta impulsiva de um sistema causal é 0 para n<0**

Causal   Não causal

PROPRIEDADES DE SISTEMAS

- **INVERTIBILIDADE**
  – **Diz-se que um sistema é invertível quando há um sistema (dito inverso) que o anula, de modo que o sinal não é alterado quando passa por esses dois sinais**



y(n)=x(n)*h(n)

z(n)=y(n)*h'(n) = x(n)*h(n)*h'(n) ⇒ h(n)*h'(n)= d(n)

Exemplo de um sistema invertível: um integrador

Integrador → h(n)=u(n)
Diferenciador → h'(n)=d(n)-d(n-1)

h(n)*h' (n)=u(n)*(d(n)-d(n-1)
=u(n)*d(n)-u(n)*d(n-1)
=u(n)-u(n-1)
=d(n)

PROPRIEDADES DE SISTEMAS

- **ESTABILIDADE**
  – **Há vários critérios de estabilidade diferentes.**
  – **Vamos considerar um sistema estável se só se e apresentar uma *<u>SAÍDA LIMITADA PARA UMA ENTRADA LIMITADA</u>***
    →**Uma sequência diz-se limitada se |x(k)|<M** $\forall_k$
    →**Exemplo:**

u(n)	é limitada	(numca é maior que 1)
x (n) = n	não é limitada	(tende para infinito)

  – **Para que um sistema seja estável é necessário que a sua resposta impulsiva seja absolutamente somável**

|y(n)|=|x(n)*h(n)|= | Σ x(k)h(n-k) |
≤ Σ|x(k)| |h(n-k)| mas |x(k)|<M
≤ Σ M |h(n-k)|
= M Σ| h(n-k)| se Σ| h(n-k)|, e fôr N…
≤ MxN

Um integrador é um sistema estável ? E o integrador com perdas apresentado no acetato 6 ? E o diferenciador do acetato anterior ?

PROPRIEDADES DE SINAIS

Análise de Sinais

- **ENERGIA**
  - Define-se energia de um sinal como sendo:

$$Energia = W = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} |x(k)|^2$$

  - Para sinais periódicos, é mais conviniente usar a energia média, ou potência(dado que a energia total é infinita):

$$Energia\ media = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{k=N-1} |x(k)|^2$$ onde N=periodo

  - Ou generalizando para qualquer sinal:

$$Potencia = P = \lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{t=-k/2}^{t=+k/2} |x(t)|^2$$

13

Convolução em sistemas contínuos

Análise de Sinais

- **Em sistemas contínuos, basta substituir impulsos por deltas de Dirac, e somatórios por integrais…**

14

Descrição de sistemas através de EQUAÇÕES ÀS DIFERENÇAS

Análise de Sinais

- **Muitos sistemas são descritos através de equações**
  - **Forma geral:** $a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \ldots + a_2\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1\frac{d\ y}{dt} + y = b_0 x + b_1\frac{d\ x}{dt} + \ldots + b_m\frac{d^m x}{dt^m}$

x → sistema → y

$$\sum_{i=0}^{N} a_i \frac{d^i y}{dt^i} = \sum_{i=0}^{M} b_i \frac{d^i x}{dt^i}$$

Equação homogénea   Termo forçado

O que é uma derivada de um sinal discreto ?

  - Em sistemas discretos usam-se diferencas finitas em vez de derivadas

N = Ordem do sistema

$$\sum_{i=0}^{N} a_i y(n-i) = \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-k)$$

15

Equações às diferenças

Análise de Sinais

- **Por uma questão de normalização, considere-se a_0=0, e re-escreve-se a equação como:**

$$y(n) = -\sum_{i=1}^{N} a_i y(n-i) + \sum_{i=0}^{M} b_i x(n-k)$$

Derivadas da saída   Derivadas da entrada

- **Termos derivados da saída**
  - Forma uma equação RECURSIVA
  - Dão origem a uma resposta impulsiva INFINITA
  - Dão origem aos filtros IIR (Infinite Impulse Response)
- **Termos derivados das entradas**
  - Formam uma equação NÃO RECURSIVA
  - Dão origem a uma resposta impulsiva FINITA
  - Dão origem aos filtros FIR (Finite Impulse Response)

16

Equações às diferenças- Parte homogénea

Análise de Sinais

- **A dinâmica de muitos sistemas contínuos pode ser descrita através de equações diferenciais homogéneas**

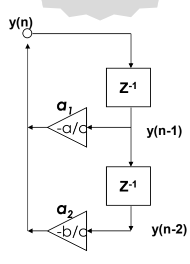
  ay''+by'+cy=0

- **De modo análogo, a correspondente representação por equações às difrenças será**

  ay(n-2)+by(n-1)+cy(n)=0

- **A implementação a partir das equações às diferenças é imediata**

Resposta impulsiva infinita - IIR



ay(n-2)+by(n-1)+cy(n)=0

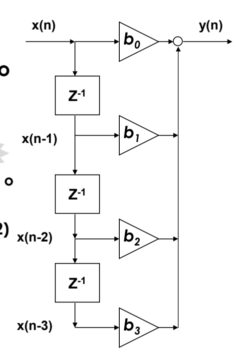
⇒ y(n) = -a/c y(n-2) -b/c y(n-1) =0

17

Equações às diferenças - Parte forçada

Análise de Sinais

- **O sinal de entrada atrasado pode ser obtido com um tap-delay, implementado como um conjunto de flip-flops (um registo de deslocamento) ou simulado com uma matriz**



Resposta impulsiva finita - FIR

- **Exercício:**
  - Simular em Excel, e depois em Matlab, o sistema caracterizado por

a) y(n)=1/3 x(n)+1/3 x(n-1)+1/3 x(n-2)

b) y(n)= 0.5 x(n) + 0.5 y(n-1)

quando recebe as seguintes entradas

x(n) = d(n)	x(n) = u(n)
x(n) = n	x(n) = sin(0,1×n)

18

Equações às diferenças

- **Estrutura de um filtro genérico**
- **FIR**
  - Finite Impulse Response
  - Tem atrasos da entrada
- **IIR**
  - Infinite Impulse Response
  - Tem atrasos da saída