Capítulo 3

Transformadas de Fourier e Fourier Discreta

Bibliografia

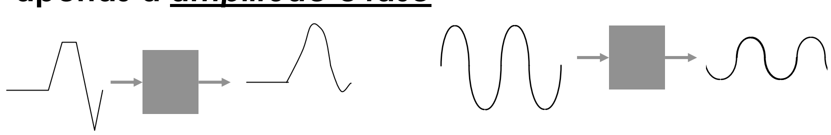
(Cap.3,4 Louretie)(Cap.3,6 Haykin)(Cap.3 Ribeiro)

Domínio da frequência

- **Qualquer sinal (1) pode ser decomposto numa soma de exponenciais complexas**
  - **Uma exponencial complexa é a soma de um seno com um coseno**

$$e^{j\omega n} = \cos(\omega n) + j \sin(\omega n)$$

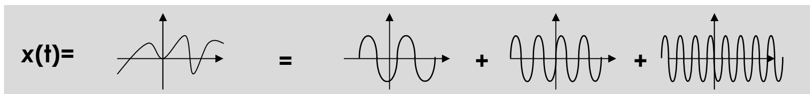
- **A decomposição em senos e cosenos é muito útil pois são são funções próprias de SLITS: a *forma* de onda de saída é idêntica à da entrada, diferindo apenas a *amplitude* e *fase***



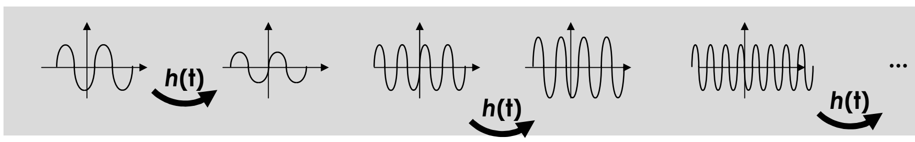
  - **Facilidade de caracterização: bastam dois parâmetros**

Motivação para a transformada de Forier

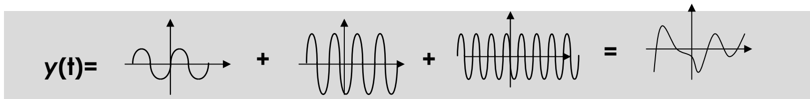
- **Para calcular a resposta de um SLIT a um sinal**
  - Partir o sinal em vários sinais sinusoidais



  - Calcular o modo como o SLIT responde a cada um deles

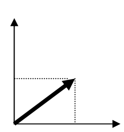


  - Somá-los



Motivação para a transformada de Forier

- **Como partir um sinal em sinusoides ?**
  - Ver quão semelhante é o sinal a cada seno
  - Fazer a projecção do sinal sobre "eixos de sinusoides"



  - Produto interno de vectores -> produto interno de sinais

Definição da transformada de Fourier

- **Definição:**

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{-j\omega n} d\omega$$

Frequências discretas variam entre -π e π

sinais contínuos

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

Comentários sobre a Transf. de Fourier

- **Domínio do tempo vs Domínio da frequência**
  - **Corresponde a olhar para a mesma coisa segundo ângulos diferentes**
  - **Podemos passar de um domínio para o outro sem perder informação**
  - **A representação no domínio da frequência chama-se ESPECTRO DE FREQUÊNCIA**

Domínio do tempo

$$\begin{tikzcd}
x(t) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & h(t) \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow] & y(t) \arrow[d, leftrightarrow, "\text{Transformada de Fourier}"] \\
X(\omega) \arrow[r] & H(\omega) \arrow[r] & Y(\omega)
\end{tikzcd}$$

Domínio da frequência

Existência da transformada

- Os somatórios/integrais podem divergir
  - A transformada não existe nesses casos (ou é infinita...)

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n) e^{-j\omega n}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

- Condições SUFICIENTES
  - Condiçoes de Dirichelet:
    - →x(t) é absolutamente somável/integrável
    - →No caso contínuo, x(t) tem que ter um número finito de máximos/mínimos, e um número finito de descontinuidades em qualquer intervalo finito
      (sempre verificado no caso discreto)
- Outros casos
  - Usando funções de Dirac é possível calcular a transformada de muitos mais sinais (senos/cosenos,escalões, funções contínuas

Comentários sobre a Transf. de Fourier

- Grande simplificação:
  - Transforma convoluções em multiplicações
  - Convolução de sinais no tempo =
    Multiplicação das suas transformadas no tempo !

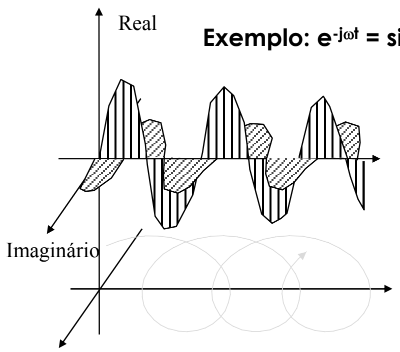
$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=+\infty} x(t) h(t-\tau) \Leftrightarrow Y(\omega) = X(\omega) H(\omega)$$

  - O cálculo da resposta de um SLIT a uma dado sinal de entrada torna-se muito fácil se formos capazes de passar de/para o dominínio da frequência

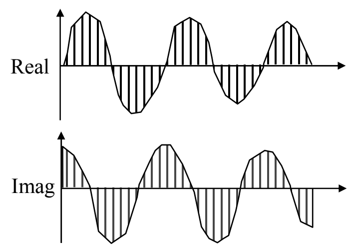
Comentários sobre a Transf. de Fourier

- **Grande complicacação:**
  - A transformada de um sinal real é um sinal complexo
  - Cada ponto no espectro é caracterizado por uma magnitude uma fase (ou parte real/parte imaginária)

Exemplo: $e^{-j\omega t} = \sin(\omega t)+j\times\sin(\omega t)$ = sinusoide complexa



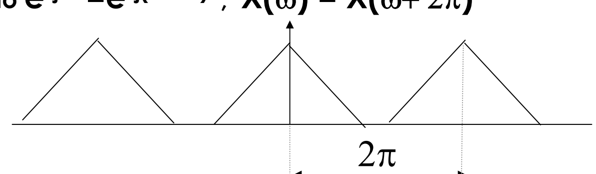
Visão tri-dimensional



Visão catesiana

Transf. de Fourier de sinais discretos

- **Ideia base:**
  - Ver quão semelhante é o sinal em causa com cada uma das sinusóides
  - Medida de similitude: produto interno
    - $\rightarrow$A componente de frequência x é o produto interno (ponto a ponto), entre o sinal e o seno dessa frequência !
- **A transformada de um sinal discreto é uma função contínua !**
  - Não dá jeito nenhum… vamos ter que a calcular num conjunto finito de pontos
- **O espectro de um sinal discreto é periódico !**
  - Como $e^{-j\omega n}=e^{-j(\omega+2\pi)n}$, $X(\omega) = X(\omega+ 2\pi)$

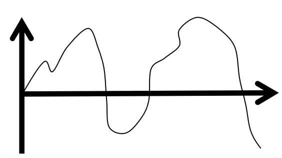


Ponto da situação com MATLAB

- **Exercício:**
  - Rotina para calcular a convolução entre 2 sinais
    - →Poderemos calcular a saída de um SLIT quando excitado com um sinal qualquer
  - Rotina para calcular a transformada de Fourier num dado ponto (frequência)
    - →Poderemos calcular o espectro de um sinal num conjunto arbitrário de pontos
    - →Poderemos calcular a saída de um SLIT quando excitado com um sinal qualquer

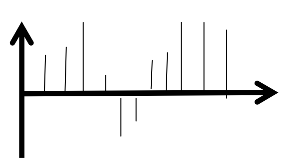
Amostragem

- **Questões:**
  - Com que periodicidade devo amostrar sinais contínuos quando estou a convertê-los em digitais ?
  - Qual a relação entre a frequência "real" do sinal, e a "frequência digital" ?
  - Qual a relação entre "*n*" e "*t*"



$x_c(t)$

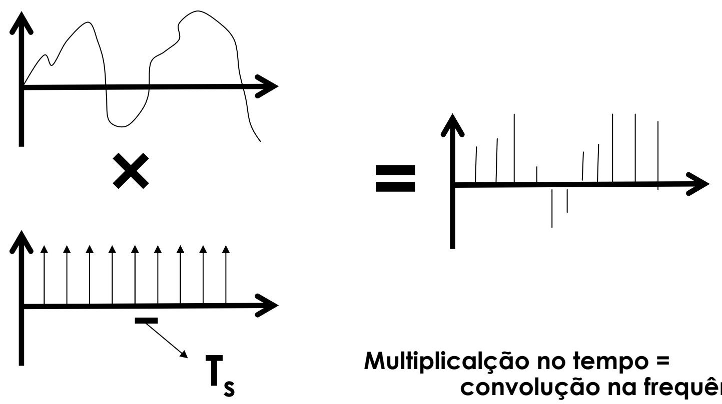
- **Conceito de período/frequência de amostragem**
  - Intervalo entre 2 amostras = T_s (T_{Sample})
  - $1/T_s$ = f_s=Frequência de amostragem



$x_d(n)= x_c(nT_s)$

Amostragem

- Se multiplicar o sinal analógico por um "pente de Diracs", obtenho o digital !

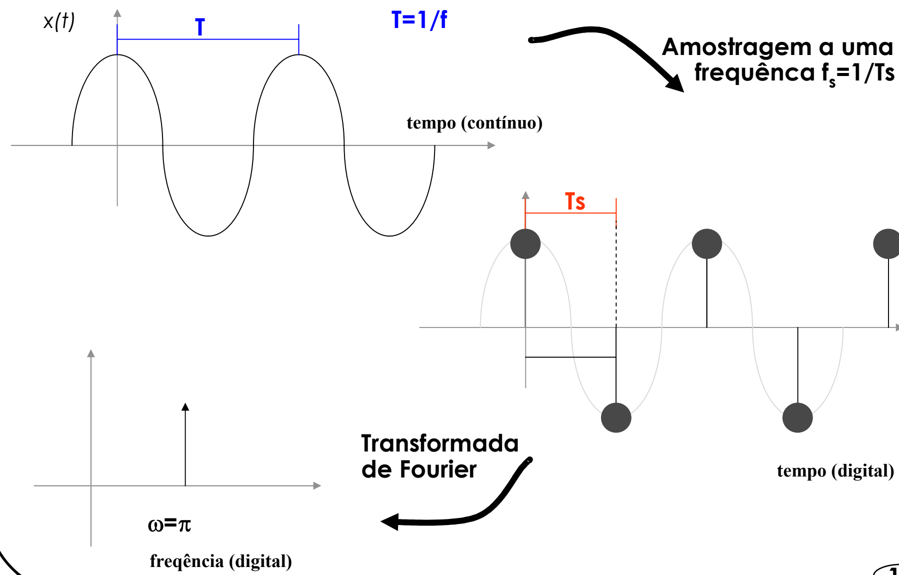


Multiplicalção no tempo = convolução na frequência

Frequência em contínuo e em digital

- Qual a relação entre frequência de um sinal contínuo e desse mesmo sinal amostrado ?
  - EXPLICAÇÂO INTUITIVA
    - → <u>Sabemos</u> que 2 frequências que diferem em 2π serão rigorosamente idênticas quando amostradas.
    - → <u>Sabemos</u> que de $\omega=\pi$ a 2π a "taxa de variação" diminui
    - → <u>Sabemos</u> que $\omega=\pi$ corresponde à maior frequência digital possível
    - → Sabemos que no domínio do tempo, o sinal digital de maior frequência é aquele em que duas amostras consecutivas têm sempre sinal contrário e a mesma amplitude (pente alternado)
    - → <u>Sabemos</u> que o pente alternado tem uma frequência de $1/(2^*Ts)=f_s/2$, e quem um sinal digital de frêquência π é um pente alternado !
    - → <u>Logo</u>, um sinal contínuo de <u>frequência $f_s/2$</u>, quando amostrado com uma frequência f_s, tem uma <u>frequência digital π</u>.

E agora os bonecos…



Para quem esteve a dormir…

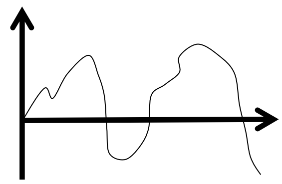
- Regra de 3 simples…

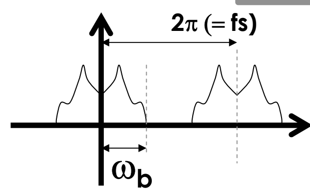
$$f_{contínuo} = fs/2 \leftrightarrow f_{digital} = \pi = 3.1416\ldots$$

$$\frac{fs/2}{f_{contínuo}} = \frac{\pi}{f_{digital}}$$

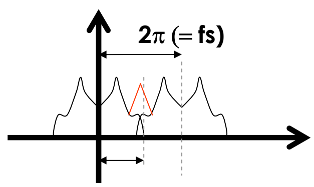
- Para os que ainda mais "distraídos":
  - $f_{digital} = f_{contínua} \times 2\pi/fs$
  - $f_{contínua} = f_{digital} \times fs/2\pi$

Consequências da amostragem





- Se o sinal original fôr limitado em frequência, tendo uma largura de banda de ω_b, é possível obter o seu espectro sem erros.
- Se se diminuir a frequência de amostragem, há o risco do espectro “interferir com si próprio”



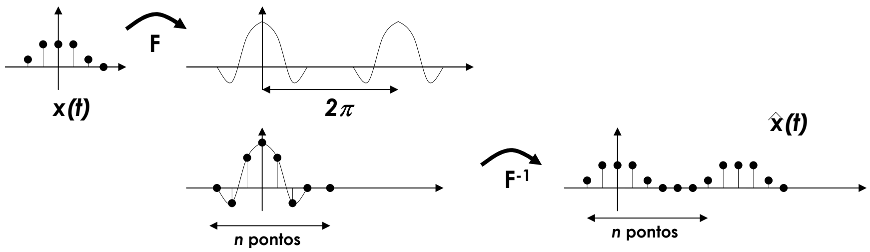
Teorema da Amostragem

- Só é possível amostrar um sinal sem perder nenhuma das suas características se ele for limitado em frequência
- Para não perder nenhuma característica (e ser possível reconstruir o sinal sem erro) é necessário amostrá-lo com uma
  - frequência de amostragem pelo menos 2 vezes superior à sua largura de banda
- $2 \times \omega_b$ = frequência de Nyquist
- Frequência de amostragem mais baixa:
  - Altas frequências interferem nas baixas
  - Haverá “ALIASING” no domínio do tempo

Amostragem em frequência

Análise de Sinais

- Amostrar lentamente no tempo – aliasing na frequência
- Amostrar lentamente na frequência – aliasing no tempo



- Amostragem de modo a não perder informação:
  - USAR TANTOS PONTOS NA FREQUÊNCIA COMO NO TEMPO

V.Lobo @ EN

19

Mais comentários...

Análise de Sinais

- Aumentar a frequência de amostragem:
  - Aumenta a largura de banda que podemos amostrar sem erros
  - A frequência digital corresponde a frequências cada vez maiores
- Aumentar o número de pontos amostrados no tempo:
  - Aumenta a resolução em frequência
  - Quanto mais tempo tenho para amostrar, melhor distingo frequências próximas

V.Lobo @ EN

20

Propriedades da Transformada de Fourier

- **Dado** $F(x(t)) = X(\omega)$
- **Linearidade**
$$x(t) = ay(t) + bz(t) \xleftrightarrow{F} X(\omega) = aY(\omega) + bZ(\omega)$$
- **Deslocamento no tempo**
$$x(t - t_0) \xleftrightarrow{F} e^{j\omega t_0} X(j\omega)$$
- **Simetria do conjugado**
$$x^*(t) \xleftrightarrow{F} X^*(-\omega)$$
  - **Mas se x(t) for real, x*(t)=x(t) logo X(ω)=X*(-ω)**
  - **Se X(ω)=X*(-ω) então**
    - **→PARA SINAIS REAIS, o espectro de potência é um sinal PAR**

Propriedades da Transformada de Fourier

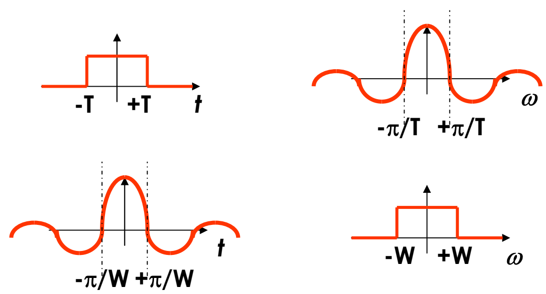
- **Diferenciação**
$$\frac{dx(t)}{dt} \xleftrightarrow{F} j\omega X(\omega)$$
- **Integração**
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \xleftrightarrow{F} \frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$$
- **Multiplicação (modulação)**
$$r(t) = s(t)p(t) \xleftrightarrow{F} R(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(S(\omega) * P(\omega)\right)$$

Propriedades da Transformada de Fourier

- **Relação de Parseval (Conservação da energia)**

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

- **Pares notáveis de sinais/transformadas**
  - **Para não andar a fazer contas…consultar TABELAS!**
  - **Exemplo:**
    - **$\rightarrow$ Pulso quadrado $\leftrightarrow$ Sinc**



Transformada Inversa

- **Transformada Inversa**
  - **Recupera o sinal a partir da sua transformada**

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \iff x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega) e^{-j\omega t} d\omega$$

$$X(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} x(n) e^{-j\omega n} \iff x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(\omega) e^{-j\omega n} d\omega$$

Cálculo da transformada

- **Há uma série de simetrias que fazem com que os mesmos coeficientes sejam usados várias vezes**
  - SIN(x)=COS(π/2-x)
  - Há várias técnicas, mas todas elas reduzem drasticamente o tempo de cálculo
  - FFT – Fast Fourier Transform
    - $\rightarrow$A partir da definição $\rightarrow n^2$
    - $\rightarrow$Com FFT $\rightarrow$ n log(n)
  - Semelhança entre transformada directa e inversa
    - $\rightarrow$As rotinas de FFT com pequenas alterações calculam também a transformada inversa

- **Exercício em MATAB**
  - Imagine que um dado radar transmite um sinal da seguinte forma: x(t)=4sin(4E9/2π * t)+sin(2.3E6//2π * t)
  - Calcule numericamente o espectro desse sinal (com 1024 pontos) usando directamente a definição de transformada e usando a rotina FFT do matlab. Calcule a diferença de tempo gasto em cada uma das opções