

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020




Balística e Tiro

Trajectoria balística (principal)

Victor Lobo
Baseado no material do
1TEN Baptista Claro (2018/19)
CFR EN-AEL Conceição Palma (2010/2014)

3º ano dos cursos EN-AEL e FZ

1



Balística Externa

- Objetivo prático do estudo da balística externa:
 - Fornecer os dados necessários à elaboração de **projetos de peças e projéteis**
 - Criar programas (anteriormente tabelas) para **prever trajetórias** em diversas condições
 - Criar direções de tiro (anteriormente tabelas de tiro) para **utilização durante o tiro**
- É necessário fazer **medições prévias** muito precisas de dados geométricos e cinemáticos de algumas trajetórias experimentais.
- Destas medições extraem-se **parâmetros característicos** que permitem efetuar cálculos necessários
- Balística externa tem um **aspecto experimental**, bem como um **matemático e computacional**.

2

Balística e Tiro (parte 2)

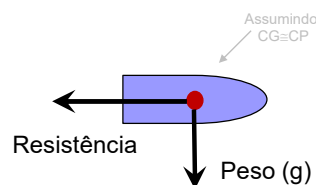
3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Balística Externa

- Na balística externa (em primeira aproximação) não estudamos senão trajetórias cujas formulas geométricas apresentam uma simetria de resolução em torno de um eixo e que possuem uma boa estabilidade aerodinâmica.
- Nestas condições a **resultante das forças aerodinâmicas** pouco se afastará da direção do movimento do centro de gravidade do projétil e a sua grandeza não será significativamente influenciada por este afastamento.

3

Balística Externa



- Em geral o estudo da trajetória de um projétil estabilizado pode ser considerado como o de um ponto (centro de gravidade) ao qual são aplicadas duas forças:
 - O peso do projétil;
 - A resistência do ar, tangente à trajetória, cuja grandeza é apenas função da velocidade do centro de gravidade e das características do ar no ponto considerado.
- Este problema é, todavia, tão longo e difícil de resolver que é habitual separá-lo em duas partes

4

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Problema balístico principal

- Inicialmente resolve-se o designado **Problema Balístico Principal**, supondo-se o projétil numa atmosfera padrão, sem vento, cujas características físicas variam de acordo com uma lei bem determinada.

5

Problema balístico secundário

- Passa-se depois ao **Problema Balístico Secundário** onde se procede ao cálculo das alterações em alcance resultantes de perturbações, tais como:
 - Vento
 - Derivação giroscópica
 - Diferenças entre a atmosfera padrão e a real
 - Forma do projétil
 - Etc....

6

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Nomenclatura da trajetória

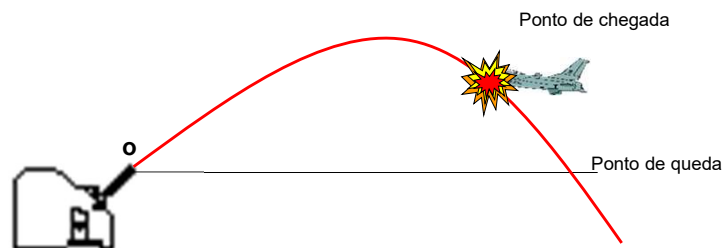
- Entende-se por nomenclatura da trajetória o conjunto de nomes e as definições dos vários elementos que compõem a trajetória

7

Nomenclatura da trajetória

■ Trajetória

- A **Trajetória** é a curva descrita no espaço pelo centro de gravidade do projétil.
- Os **Limites da trajetória** tem como origem a boca da peça (O) no momento do fogo e termina quando embate no alvo ou interceta o ponto de queda.



8

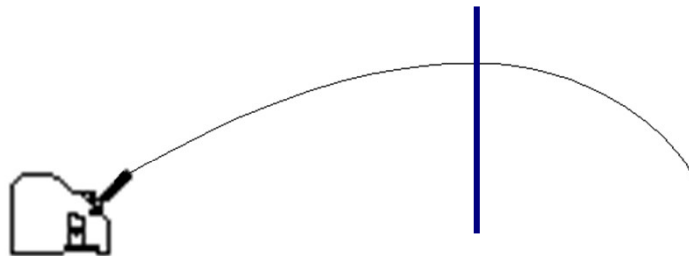
Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Nomenclatura da trajetória

■ Características da trajetória na atmosfera

- A curva da trajetória tem a concavidade voltada para baixo;
- O ramo descendente é sempre mais curvo e menos extenso que o ascendente.

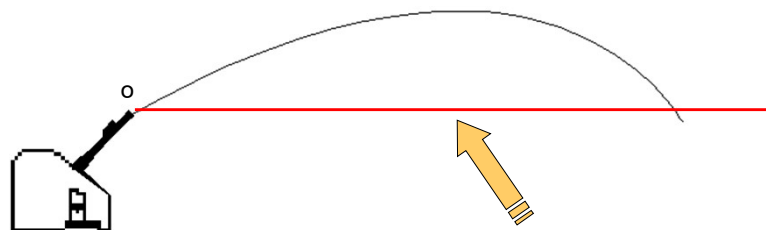


9

Nomenclatura da trajetória

■ Horizonte da peça

- É o plano horizontal que passa pela origem da trajetória.



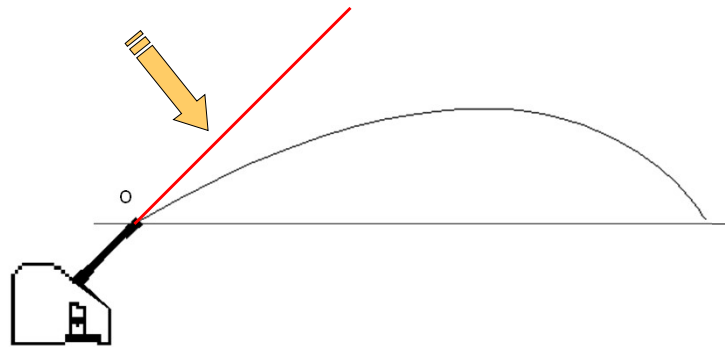
10

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Nomenclatura da trajetória

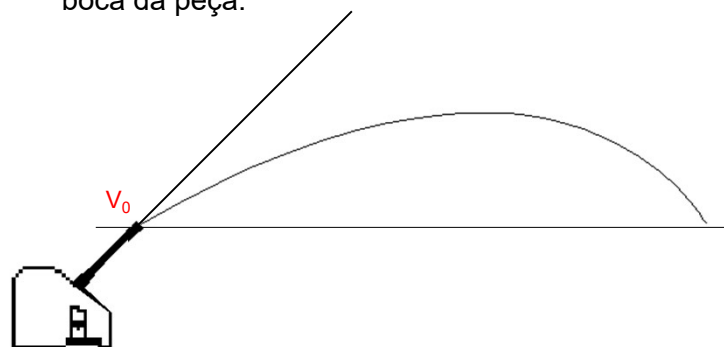
- Linha de tiro
 - É a linha reta definida pelo prolongamento do eixo da peça em pontaria.



11

Nomenclatura da trajetória

- Velocidade inicial (V_0)
 - Velocidade de translação do projétil ao abandonar a boca da peça.



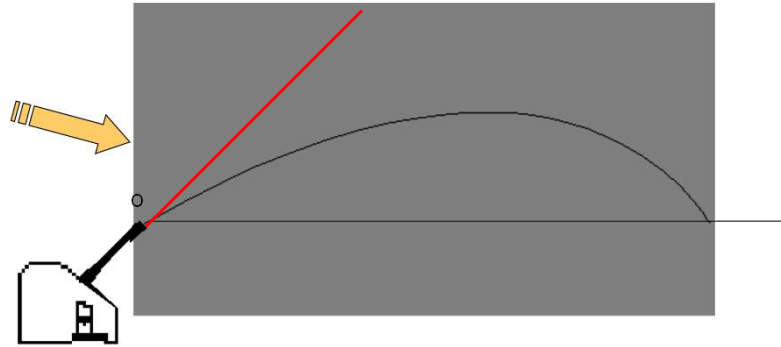
12

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Nomenclatura da trajetória

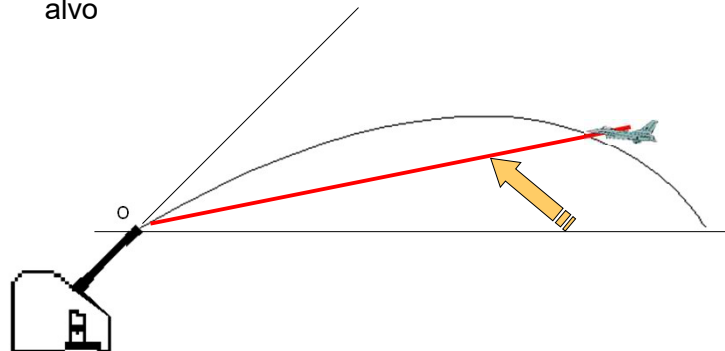
- Plano de tiro
 - É o plano vertical que contém a linha de tiro.



13

Nomenclatura da trajetória

- Linha de sítio
 - É a linha reta que une a boca da peça com o alvo, ou a linha reta que une o eixo do órgão de pontaria com o alvo



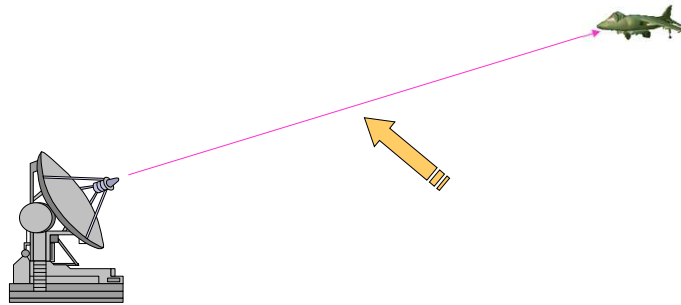
14

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Nomenclatura da trajetória

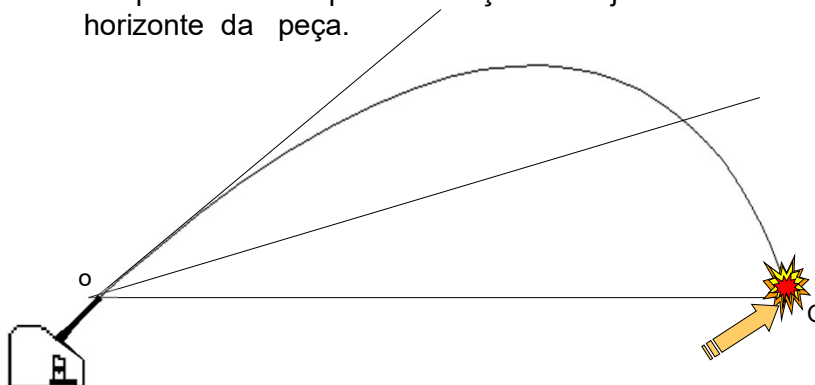
- Linha de mira
 - É a linha reta definida pelo eixo do órgão de pontaria (ótico ou eletromagnético)



15

Nomenclatura da trajetória

- Ponto de queda (Q)
 - É o ponto definido pela interseção da trajetória com o horizonte da peça.



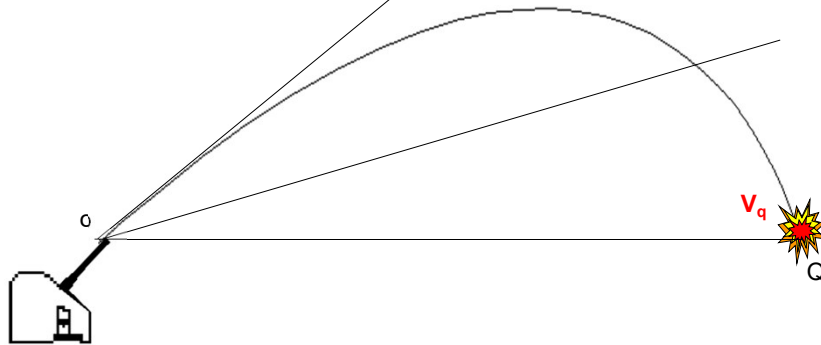
16

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Nomenclatura da trajetória

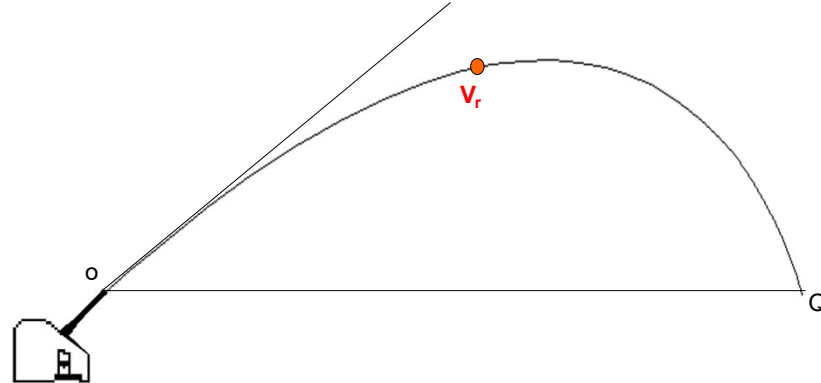
- Velocidade de queda (V_q)
 - Velocidade restante no ponto de queda



17

Nomenclatura da trajetória

- Velocidade restante num ponto da trajetória (V_r)
 - É o valor da velocidade do projétil no ponto considerado



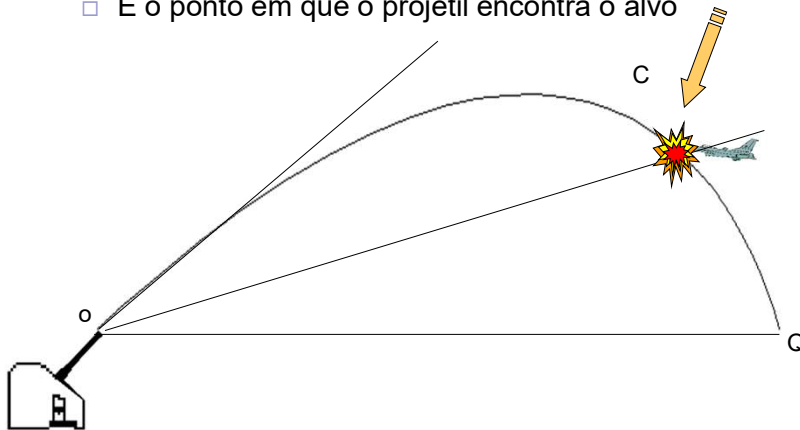
18

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Nomenclatura da trajetória

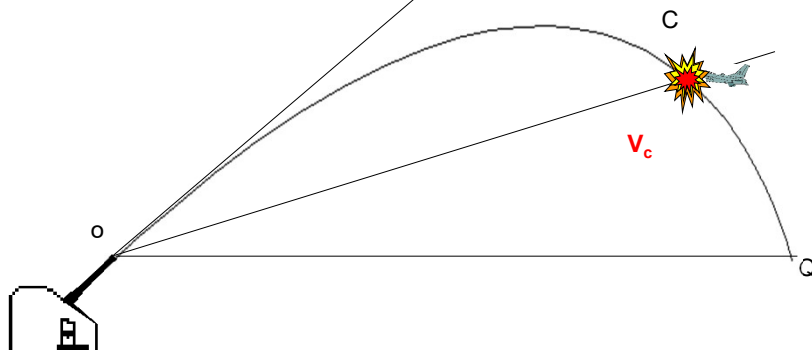
- Ponto de chegada (c)
 - É o ponto em que o projétil encontra o alvo



19

Nomenclatura da trajetória

- Velocidade de chegada (V_c)
 - Velocidade restante no ponto de chegada



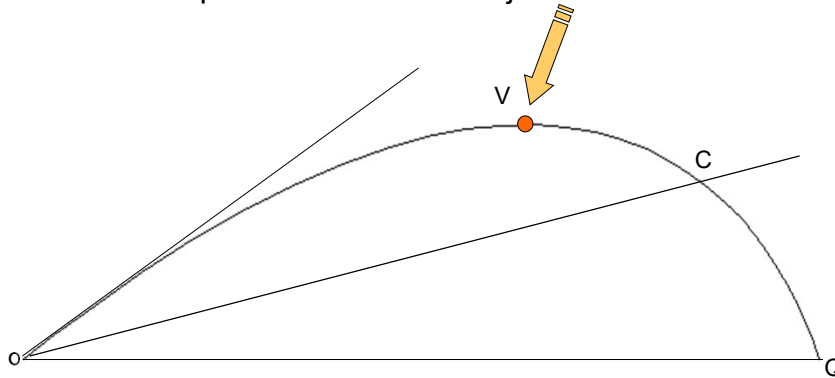
20

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Nomenclatura da trajetória

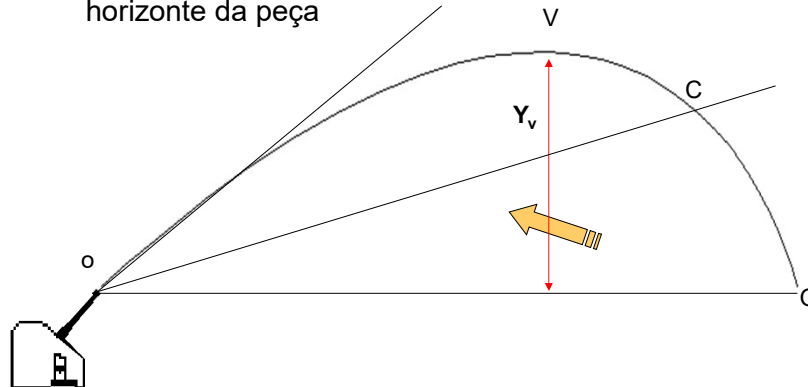
- Vértice da trajetória (V)
 - É o ponto mais alto da trajetória



21

Nomenclatura da trajetória

- Flecha ou ordenada do vértice (Y_v)
 - É a ordenada do vértice da trajetória medida do horizonte da peça



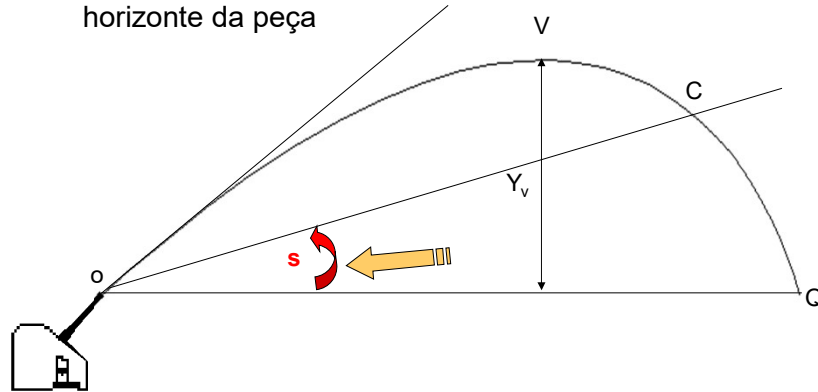
22

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Nomenclatura da trajetória

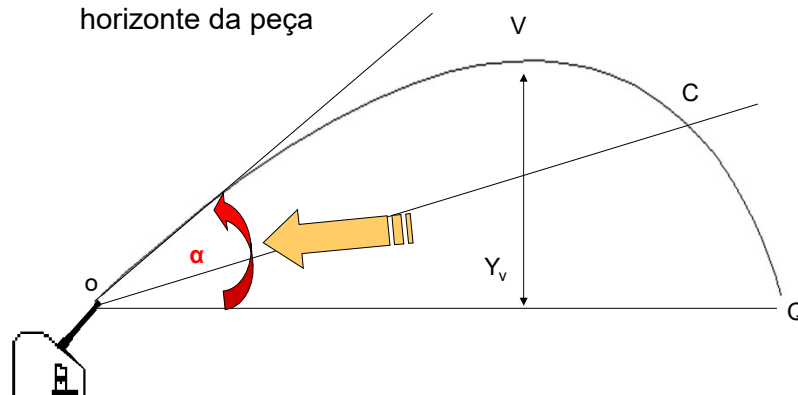
- Ângulo de sítio (s)
 - É o ângulo compreendido entre a linha de sítio e o horizonte da peça



23

Nomenclatura da trajetória

- Ângulo de tiro (α)
 - É o ângulo compreendido entre a linha de tiro e o horizonte da peça



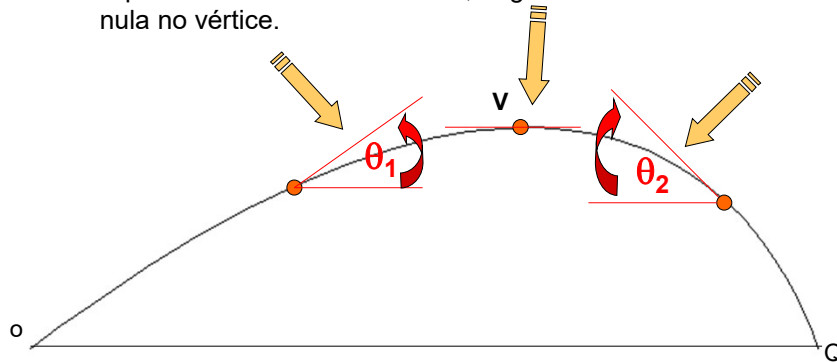
24

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Nomenclatura da trajetória

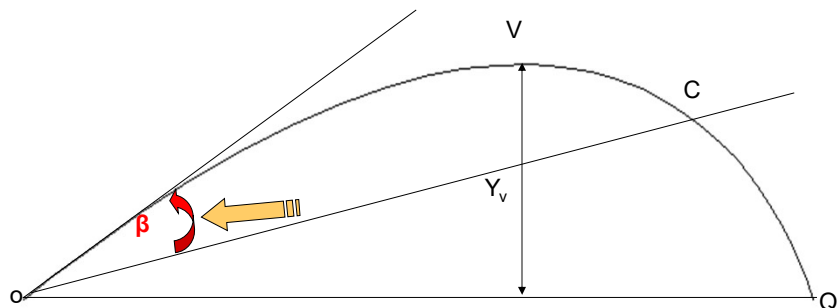
- Inclinação da trajetória num ponto (θ)
 - É o ângulo formado pela tangente à trajetória nesse ponto com a horizontal.
 - É positiva no ramo ascendente, negativa no descendente e nula no vértice.



25

Nomenclatura da trajetória

- Ângulo de superelevação (β)
 - É o ângulo compreendido entre a linha de sítio e a linha de tiro



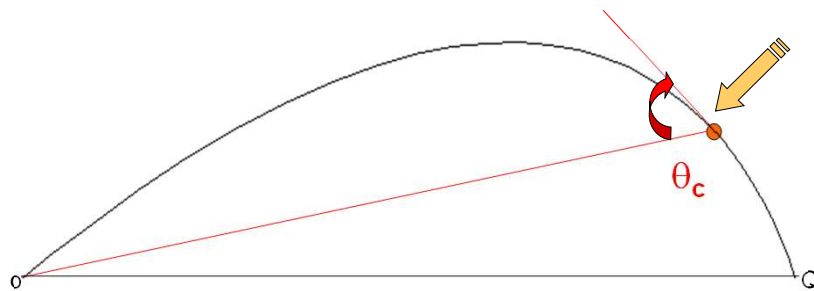
26

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Nomenclatura da trajetória

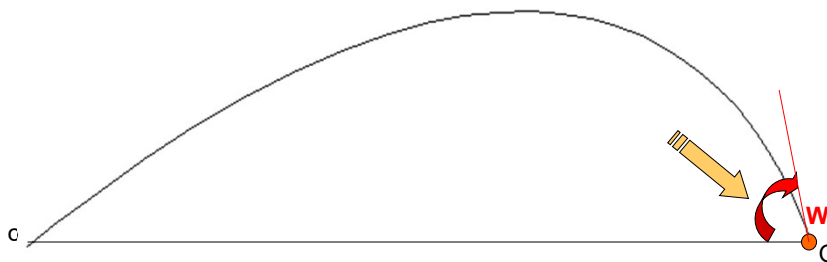
- Ângulo de chegada (θ_c)
 - É o ângulo formado pela tangente à trajetória no ponto de chegada com a linha de sítio.



27

Nomenclatura da trajetória

- Ângulo de queda (W)
 - É o ângulo formado pela tangente à trajetória no ponto de queda com a horizontal.



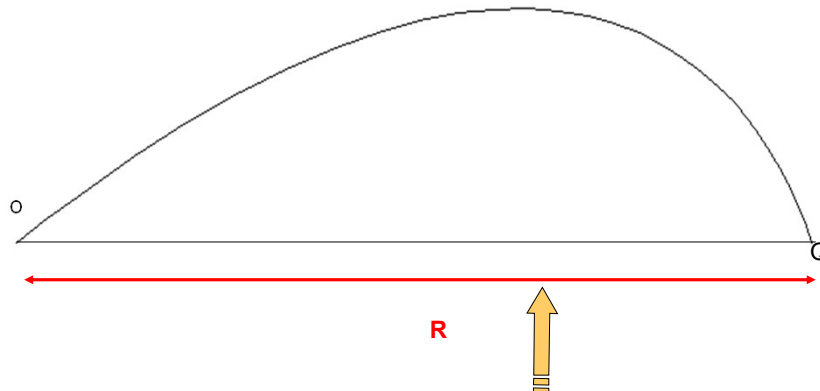
28

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Nomenclatura da trajetória

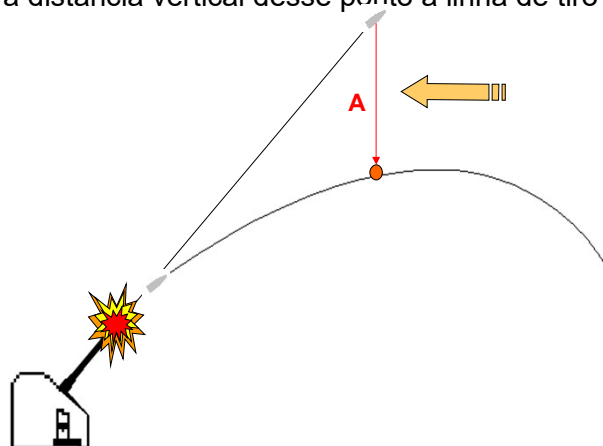
- Alcance (R)
 - É a distância da origem ao ponto de queda



29

Nomenclatura da trajetória

- Abaixamento da trajetória num ponto (A)
 - É a distância vertical desse ponto à linha de tiro



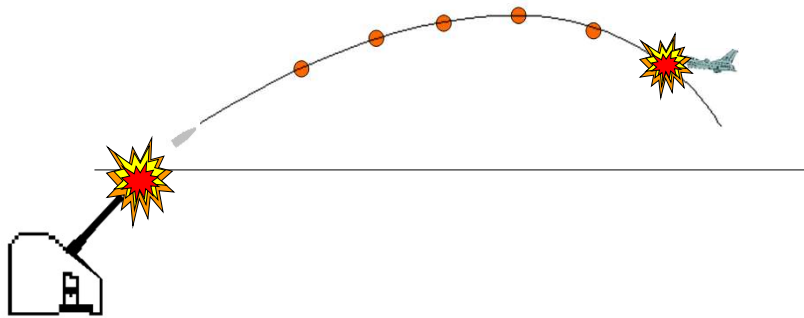
30

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Nomenclatura da trajetória

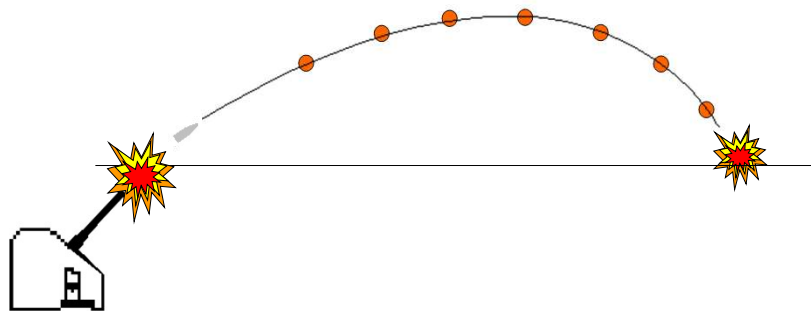
- Duração do trajeto (t)
 - É o tempo gasto pelo projétil para atingir um ponto da trajetória.



31

Nomenclatura da trajetória

- Duração da trajetória (T)
 - É a duração do trajeto referida ao ponto de queda.



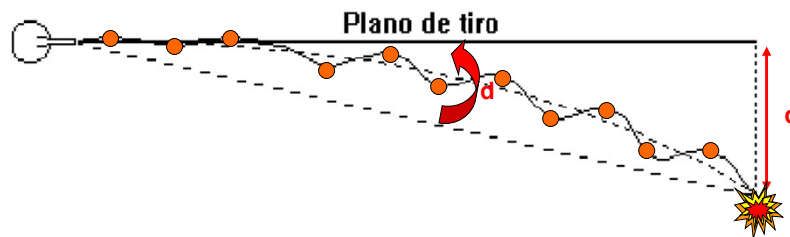
32

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Nomenclatura da trajetória

- Derivação (d)
 - É o deslocamento lateral do projétil em relação ao plano de tiro, devido ao seu movimento.



33

Nomenclatura da trajetória

- Linha de projeção
 - É a linha imaginária constituída pelo prolongamento do eixo do cano no momento do tiro.

(Este conceito só tem significado para a peça real, na última fase de resolução do problema do tiro naval).

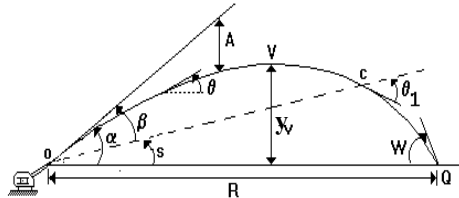
34

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Nomenclatura da trajetória

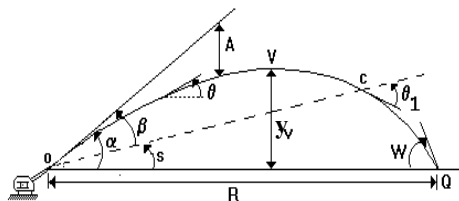
- Trajetória
- Linha de tiro
- Velocidade inicial
- Plano de tiro
- Linha de sítio
- Linha de mira
- Ponto de queda
- Velocidade de queda
- Ponto de chegada
- Velocidade de chegada
- Vértice da trajetória
- Velocidade restante num ponto da trajetória



35

Nomenclatura da trajetória

- Ângulo de sitio
- Ângulo de chegada
- Ângulo de queda
- Alcance
- Duração do trajeto
- Derivação
- Duração da trajetória
- Flecha ou ordenada do vértice
- Inclinação da trajetória num ponto
- Abaixamento da trajetória num ponto

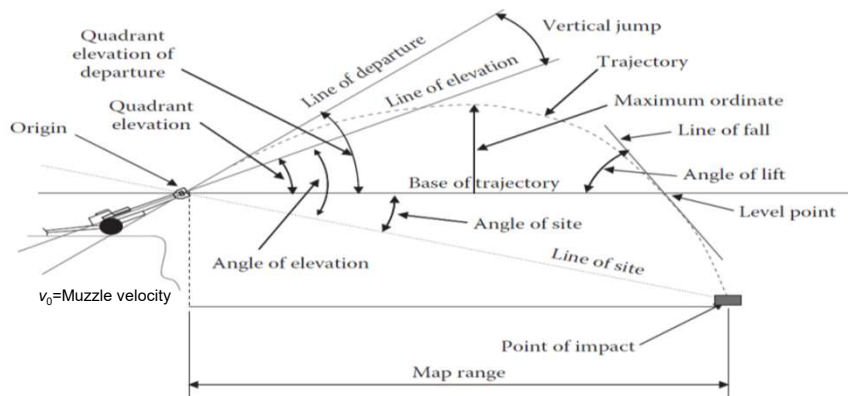


36

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

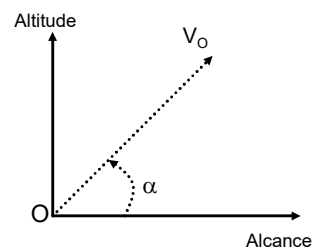
Nomenclatura em Inglês



37

Trajétória no vácuo

- Considere-se um projétil disparado com um ângulo de elevação α e uma velocidade inicial V_0 (m/s).
- Segundo a primeira lei de Newton, um corpo em movimento mantém-no, em linha reta e velocidade constante, a não ser que uma força externa seja exercida no corpo.
- Portanto, na ausência de gravidade ou de qualquer outra força externa, o projétil continuará com a direção e velocidade inicial.



38

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Trajectoria no vácuo

- O campo de gravidade terrestre, tem o efeito de atrair o projétil na direção do centro da terra com a aceleração de g (m/s^2).
- A aceleração da gravidade varia com a altura de acordo com a seguinte expressão:

$$g = g_0 \left(\frac{R}{R+y} \right)^2$$

onde:

y – altura à qual se mede g

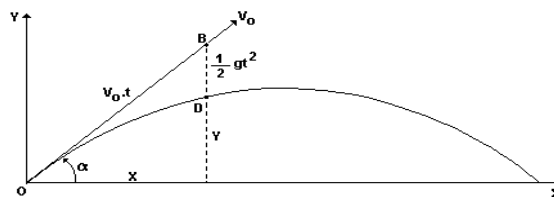
g_0 – aceleração da gravidade ao nível do solo

R – raio da terra

- Qual a influência da força da gravidade sobre a trajetória dos projéteis disparados por armas de pequeno alcance na nossa latitude?

39

Trajectoria no vácuo



- Para armas de pequeno alcance e na nossa latitude, pode-se assumir que o campo gravítico é uniforme e produz uma aceleração que toma o valor constante de $g = 9,81 \text{ m/s}^2$.
- Durante o tempo t o projétil, sujeito à ação da gravidade, cai uma altura $BD = A = \frac{1}{2} gt^2$.

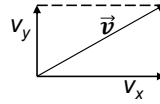
40

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Revisões de física e matemática básica

- Posição $\mathbf{x} = (x, y, z)$



- Velocidade $\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} = (v_x, v_y, v_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)$

- Aceleração $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (a_x, a_y, a_z) = \left(\frac{dv_x}{dt}, \frac{dv_y}{dt}, \frac{dv_z}{dt}\right)$

- $\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}$

- $\vec{v} = \int \vec{a} = \int_0^t \vec{a} dt + \vec{v}_0$

- $\vec{x} = \int \vec{v} = \int_0^t \vec{v} dt + \vec{x}_0$

Para resolver a equação diferencial:

- Métodos analíticos quando possível
- Métodos numéricos
 - Método de Euler
 - Método de Runge-Kutta

41

Trajectoria no vácuo

- Apenas 1 força, devido à gravidade
- Assume-se que a gravidade é constante (e é...)
- Calcule o abaixamento (A) provocado pela gravidade sobre um projétil disparado no vácuo ao fim de 2 segundos.

Dados

Fórmula

Cálculos

$g = 9,81\text{m/s}^2$

$\Delta x = \frac{1}{2} g t^2$

$\Delta x = \frac{1}{2} \times 9,81 \times 2^2$

$t = 2\text{s}$

$\Delta x = 4,905 \times 4$

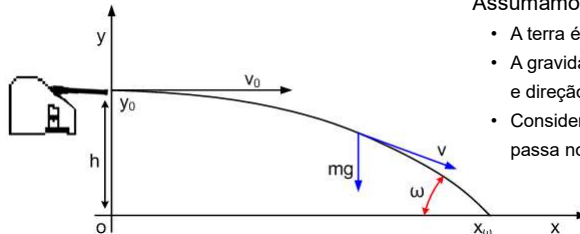
$\Delta x = 19,62\text{m}$

42

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Tiro horizontal no vácuo



Assumamos que:

- A terra é plana e imóvel;
- A gravidade é constante em grandeza e direção;
- Consideremos ainda que tudo isto se passa no vácuo.

As equações do movimento são

$$\begin{cases} f_{hor} = 0 \\ f_{vert} = -mg \end{cases} \begin{cases} ma_{hor} = 0 \\ ma_{vert} = -mg \end{cases} \begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = 0 \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg \end{cases}$$

As condições iniciais do projétil são

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = h \end{cases} \begin{cases} v_{x_0} = \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = v_0 \\ v_{y_0} = \left(\frac{dy}{dt}\right)_0 = 0 \end{cases} \begin{cases} a_{x_0} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)_0 = 0 \\ a_{y_0} = \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)_0 = -g \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = v_0 t \\ y = h - g \frac{t^2}{2} \end{cases}$$

Solução das equações do movimento para estas condições iniciais

43

Tiro horizontal no vácuo

Por eliminação de t nas equações anteriores, resulta-nos a **equação da trajetória**

$$y = h - \frac{g}{2v_0^2} x^2$$

Fazendo $y=0$, obtém-se o alcance x_ω

$$x_\omega = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

A duração do voo do projétil pode ser obtida fazendo $y=0$

$$y = 0 = h - g \frac{t_\omega^2}{2} \quad t_\omega = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

O ângulo de queda, ω , encontra-se recorrendo à $\tan(\omega)$ para $y=0$

$$\tan \omega = -\left(\frac{dy}{dx}\right)_{y=0} = 2 \frac{g}{2v_0^2} x_\omega = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0} \quad \omega = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{2gh}}{v_0}\right)$$

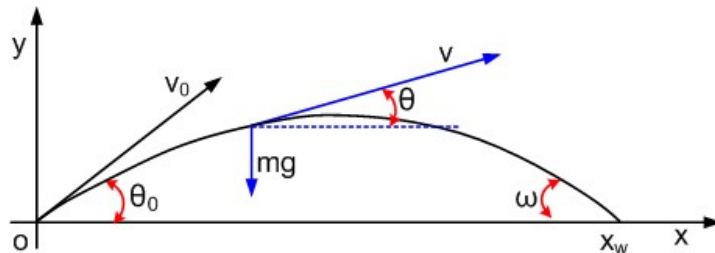
44

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Tiro angular no vácuo (tiro parabólico)

- Consideremos agora um projétil de massa m lançado no vácuo com uma velocidade inicial v_0 e segundo um ângulo θ_0 com a horizontal, assumindo que:
 - A terra é plana e imóvel;
 - A gravidade é constante em grandeza e direção;
 - Consideremos ainda que tudo isto se passa no vácuo.

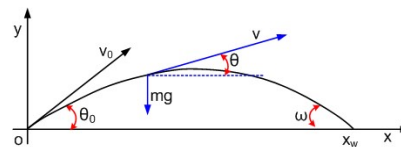


45

Tiro angular no vácuo (tiro parabólico)

Equações do movimento

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = 0 \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg \end{cases}$$



Condições iniciais do projétil

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_{x_0} = \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 = v_0 \cos \theta_0 \\ v_{y_0} = \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 = v_0 \sin \theta_0 \end{cases} \quad \begin{cases} a_{x_0} = \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right)_0 = 0 \\ a_{y_0} = \left(\frac{d^2 y}{dt^2} \right)_0 = -g \end{cases}$$

Solução das equações do movimento para estas condições iniciais

$$\begin{cases} x = v_0 t \cos \theta_0 \\ y = v_0 t \sin \theta_0 - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Eliminando t

$$y = x \tan \theta_0 - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta_0}$$

Equação da trajetória

46

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Tiro angular no vácuo (tiro parabólico)

As coordenadas do vértice podem ser encontradas fazendo $(dy/dt)=0$

$$x_v = \frac{v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0$$

$$y_v = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \theta_0$$

O tempo de voo do projétil até ao vértice $(dy/dt)=0$

$$t_v = \frac{v_0}{g} \sin \theta_0$$

Fazendo $y=0$, obtém-se o alcance x_ω

$$x_\omega = 2 \frac{v_0^2}{g} \sin \theta_0 \cos \theta_0$$

A duração da trajetória será obtida fazendo $y=0$ (na solução) ou $x=x_\omega$

$$t_\omega = 2 \frac{v_0}{g} \sin \theta_0$$

47

Tiro angular no vácuo (tiro parabólico)

A ordenada no vértice é dada por

$$y_v = \frac{1}{4} x_\omega \tan \theta_0$$

A inclinação em qualquer ponto da trajetória

$$\tan \theta = \tan \theta_0 - \frac{gt}{v_0 \cos \theta_0}$$

A velocidade restante, ou seja, no fim da trajetória

$$v_\omega = \sqrt{v_0^2 - 2gy}$$

A trajetória é simétrica para um e outro lados do vértice, logo $\omega=\theta_0$

48

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

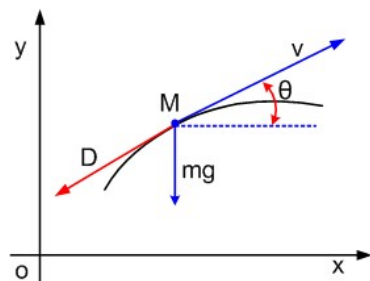
Propriedades da trajetória no vácuo

- A trajetória no vácuo é uma parábola de eixo vertical
- O ramo ascendente e o ramo descendente são simétricos
- O alcance máximo corresponde ao ângulo de projeção de 45°
- Alcances iguais para ângulos de projeção complementares (Ex.: 60° e 30°)
- Abcissa do vértice é igual a metade do alcance
- Para pontos de igual ordenada igual velocidade restante
- Para pontos de igual ordenada inclinações iguais mas de sinal contrário
- Peso, forma e as dimensões do projétil não têm qualquer influência na trajetória no vácuo.

49

Tiro com resistência do ar

- Reduzindo as equações diferenciais do movimento do centro de gravidade sob as restrições impostas no **Problema Principal**, as forças que atuam sob o projétil:
 - Peso do projétil;
 - Resistência do ar.



M – Posição do C.G. num dado instante

v – velocidade tangencial

D - força de resistência do ar; no problema principal é tangente à trajetória

mg – peso do projétil; no problema principal é constante e atua segundo uma paralela ao eixo das ordenadas

50

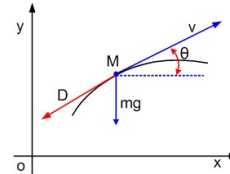
Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Tiro com resistência do ar

Projetando o movimento sobre os eixos ox e oy

$$\begin{cases} m \frac{d^2 x}{dt^2} = -D \cos \theta \\ m \frac{d^2 y}{dt^2} = -D \sin \theta - mg \end{cases}$$



Condições iniciais do projétil

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ t_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} v_{x_0} = \left(\frac{dx}{dt} \right)_0 = v_0 \cos \theta_0 \\ v_{y_0} = \left(\frac{dy}{dt} \right)_0 = v_0 \sin \theta_0 \end{cases}$$

A integração das equações diferenciais do movimento fornecer-nos-á os valores das coordenadas balísticas em cada ponto da trajetória. Entretanto por não ser possível a obtenção de uma função analítica para representar a resistência do ar, uma vez que esta é função da velocidade ao longo da trajetória, esta integração deverá ser efetuada através de métodos numéricos de cálculo.

51

Trajétória plana e reversa

- **Trajétória plana** é a curva descrita pelo centro de gravidade do projétil que se movimenta segundo as condições do Problema Principal (condições ideais).
- **Trajétória reversa** é a curva reversa descrita pelo centro de gravidade do projétil no seu movimento real

52

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Resolver a trajectória no vácuo e com resistência proporcional à velocidade em Excel usando o método de Euler

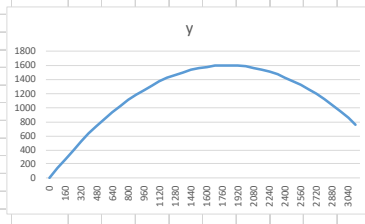
Questões ?

53

Trabalho prático

- Embora haja uma solução analítica no caso não haver resistência, faça uma folha de cálculo que use o método de Euler para resolver as equações de movimento

delta t	0,8																			
Vo	200																			
Angulo	60																			
k-resist.																				
t	0	0,8	1,6	2,4	3,2	4	4,8	5,6	6,4	7,2	8	8,8	9,6	10,4	11,2	12	12,8	13,6	14,4	
ax	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
ay	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8	-9,8
vx	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100	100
vy	173,2051	165	158	150	142	134	126	118	110	103	94,8	87	79,1	71,3	63,4	55,6	47,8	39,9	32,1	
x	0	80	160	240	320	400	480	560	640	720	800	880	960	1040	1120	1200	1280	1360	1440	
y	0	139	271	397	517	630	737	838	933	1021	1103	1179	1249	1312	1369	1420	1464	1503	1535	



(na coluna "C")
 $T = +B6 + \$B\1
 $Ax = 0$
 $Ay = -9,8$
 $Vx = +B9 + B7 * \$B\1
 $Vy = +B10 + B8 * \$B\1
 $X = +B11 + B9 * \$B\1
 $Y = +B12 + B10 * \$B\1

54

Balística e Tiro (parte 2)

3ºAno EN-AEL e FZ
V 0.1 V.Lobo, EN 2020

Trabalho prático

Peça/munição	Muzzle Velocity
Walter PPQ 9mm (Parabellum)	408
Walter PPQ 9mm (S&W)	344
Walter PPQ 9mm (medido)	320
HK G3 7.62mm (c/ lote 1)	800
HK G3 7.62mm (c/ lote 2)	747
Morteiro 81mm	267
Peça de 20mm (francesas)	1005
Orlikon 20mm	1050
Orlikon 20mm	820
Oto Melara 76	915
Oto Melara 30mm	1040
Obuz de 155mm	826
Bofors 40mm	881
Goalkeeper	1109
Phalanx	1100
Peça de 100 (Mod.1968 CADAM)	867

- Se não houvesse atmosfera:
 - qual seria o alcance de cada uma destas peças ?
 - Qual seria a maior altitude que poda atingir ?
 - Qual o envelope de alcance no vácuo ?